جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

الطـــرق العـدديـــة
Numerical Methods

المستوى الثالث / الفصل الدراسي الخامس

أستاذ المادة

م. د. نداء حسين عبد عون

المحاضرة الرابعة (الجزء 2)

2025-2026

(Solutions of Simultaneous Linear Algebraic Equation)

Gauss-Seidal Iteration, Relaxation Method

(حلول المعادلات الجبرية الخطية المتزامنة)

تكرار غاوس-سيدال ، طريقة الاسترخاء

Dr. Nada Hussein

تكرار غاوس-سيدال (Gauss-Seidal Iteration)

The Gauss-Seidel Method is an iterative technique for solving systems of linear equations, typically used when the coefficient matrix is large and sparse. It uses the most recently updated values for each variable in each iteration, which can to faster convergence. Consider a system of linear equations in matrix form:

وهي من الأساليب التكرارية التي تستخدم دائما لحل أنظمة المعادلات الخطية عن طريق استخدام أحدث قيمة محسوبة لكل متغير أثناء عملية التكرار، وذلك بهدف التقريب التدريجي للحل الصحيح.

الهدف :إيجاد حل تقريبي لنظام من المعادلات الخطية $Ax=b$ عندما تكون الطرق المباشرة (مثل طريقة الحذف لغاوس) صعبة أو غير فعالة، خاصة للأنظمة الكبيرة أي تُستخدم عادةً عندما تكون مصفوفة المعاملات كبيرة ومتفرقة. تكمن فكرتها الرئيسية في الاستفادة الفورية من أحدث القيم المحسوبة.

Dr. Nida Hussain

آلية عمل الطريقة

- **لنفترض نظام المعادلات الخطية التالي:**

1. The system given by

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n$$

Has a unique solution.

2. The coefficient matrix A has no zeros on its main diagonal, namely, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ are nonzeros.

الخطوة 1: التحقق من شروط التقارب

- يجب إعادة ترتيب المعادلات (إذا لزم الأمر) للتأكد من أن المصفوفة الناتجة مهيمنة قطريًا (أي أن القيمة المطلقة للعنصر القطري أكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية العناصر في نفس الصف) لضمان التقارب والقيم لا تساوي صفر.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

الخطوة 2: إعادة كتابة المعادلات

- يتم إعادة كتابة كل معادلة لحل المتغير القطري المقابل لها (x_1 من المعادلة الأولى، x_2 من الثانية، وهكذا):

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots a_{n,n-1}x_{n-1})$$

The solution for the new values is:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_3^{(k+1)}$$

K=0,1,2,3,….n

الخطوة 3: التخمين الأولي

ابدأ بتخمين أولي للحل (عادةً ما يكون متجهًا صفريًا $x^{(0)} = [0, 0, \ldots, 0]$).

الخطوة 4: التكرار (العملية الحسابية)

في كل تكرار (k)، يتم حساب قيم المتغيرات الجديدة باستخدام أحدث القيم المتاحة للمتغيرات الأخرى:

ملاحظة هامة: عند حساب قيمة $x_i^{(k)}$، يتم استخدام القيم الجديدة ($^{(k)}$) للمتغيرات $x_1, \ldots, x_{i-1}$ التي تم حسابها في نفس التكرار، بينما تُستخدم القيم القديمة ($^{(k-1)}$) للمتغيرات $x_{i+1}, \ldots, x_n$. هذا الاستخدام الفوري للقيم المحدثة هو ما يميز جاوس-سايدل عن جاكوبي ويمنحها تقاربًا أسرع.

الخطوة 5: معيار التوقف

تتوقف عملية التكرار عندما يكون الفرق المطلق أو النسبي بين قيم المتغيرات في التكرار الحالي والتكرار السابق أقل من قيمة سماح محددة مسبقًا (مثل ϵ).

Dr. Nida Hussein

Example 1 Solving systems of linear equations using Gauss Seidel method

$$10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$$

$$-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 = 15$$

$$-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 27$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 = -9 .$$

Gauss-Seidel method :-

$$x_1 = 0.3 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4$$

$$x_2 = 1.5 + 0.2x_1 + 0.1x_3 + 0.1x_4$$

$$x_3 = 2.7 + 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_4$$

$$x_4 = -0.9 + 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3$$

المحاولة الأولى
n=1

$x_1 = 0.3$

$x_2 = 1.5 + 0.2(0.3) + 0 + 0$
$= 1.56$

$x_3 = 2.7 + 0.1(0.3) + 0.1(1.56) + 0$
$= 2.886$

$x_4 = -0.9 + 0.1(0.3) + 0.1(1.56) + 0.2(2.886)$
$= -0.1368$

Dr. Nida Hussein

n=2

$x_1 = 0.3 + 0.2(1.56) + 0.1(2.886) + 0.1(-0.1368)$

$= 0.8869$

$x_2 = 1.5 + 0.2(0.8869) + 0.1(2.886) + 0.1(-0.13$

$= 1.9523$

$x_3 = 2.7 + 0.1(0.8869) + 0.1(1.9523) + 0.2(-0.1368)$

$= 2.9566$

$x_4 = -0.9 + 0.1(0.8869) + 0.1(1.9523) + 0.2(2.$

$= -0.0248$

n=3

$x_1 = 0.3 + 0.2(1.9523) + 0.1(2.9566) + 0.1(-0.0248)$

$= 0.9836$

Ex: $8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$ — (1)

$x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 1$ — (2)

$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 31$ — (3)

Solve by Gauss-Seidel Iteration Method

Use Maximum Absolute relative error = 0.28%

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(30 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-1}{9}(1 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(31 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)})$$

start with $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$

$x_1^{(1)} = \frac{30}{8} = 3.75$

$x_2^{(1)} = \frac{-1}{9}(1 - 3.75 - 0) = 0.306$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(31 - 2(3.75) - 3(0.306)) = 3.76$ } (1)

$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}(30 - 2 \times 0.306 - 3 * 3.76) = 2.26$

$x_2^{(2)} = \frac{-1}{9}(1 - 2.26 - 2 * 3.76) = 0.976$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(31 - 2 * 2.26 - 3 * 0.976) = 3.925$ } (2)

⋮

$x_1^{(4)} = 2.005$

$x_2^{(4)} = 0.999$

$x_3^{(4)} = 3.999$ } (3)

$x_1^{(5)} = 2$

$x_2^{(5)} = 1$

$x_3^{(5)} = 4$

Ans -

Absolute Relative Approximate Error

$|\varepsilon_a|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$

$= \left|1 - \frac{x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$

ε

$= \left|\frac{2 - 2.005}{2}\right| \times 100 = 0.25\%$

$\left|\frac{1 - 0.999}{1}\right| \times 100 = 0.1\%$

$\left|\frac{4 - 3.999}{4}\right| \times 100 = 0.025\%$

Example 3

Solve the following set of linear algebraic equations using **Gauss-Seidel** method.

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17$$

Solution

Obtain the condition

$|5| > |-2| + |1| \rightarrow 5 > 3$ .. Right

$|4| > |1| + |-2| \rightarrow 4 > 3$ .. Right

$|4| > |1| + |2| \rightarrow 4 > 3$ .. Right

∴ We can solve the problem by Gauss-Seidel Method.

$$x_1^{(k+1)} = 0.8 + 0.4x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 0.75 - 0.25x_1^{(k+1)} + 0.5x_3^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = 4.25 - 0.25x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}$$

For (k=0)/first iterative, initial guess $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

$$x_1^1 = 0.8 + 0.4 - 0.2 = 1$$

$x_2^1 = 0.75 - (0.25 * 1) - 0.5 = 0$

$x_3^1 = 4.25 - 0.25 - 0 = 4$

The process is continued by substituting the new x_2^2 & x_3^2

Iteration	X_1	X_2	X_3
1	1	0	4
2	0	2.75	2.875
3	1.324	1.8565	2.990
4	0.9446	2.008	3.007
5	1.002	2.003	2.998
6	1.001	1.999	3.000
7	0.999	2.000	3.000

$$\therefore \ x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

H.W (1)

Solve the following sets of linear equations using Gauss-Seidel and Jacobi iteration methods and compare the results of the two methods.

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$$

$$x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 31$$

https://youtu.be/wVQTSNTbA-g?si=s6ZdL5HRluIPLyr4