جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

الطـــرق العـدديـــة
Numerical Methods

المستوى الثالث / الفصل الدراسي الخامس

أستاذ المادة

م. د. نداء حسين عبد عون

المحاضرة الرابعة (الجزء 1)

2025-2026

جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

(Solutions of Simultaneous Linear Algebraic Equation)

Gaussian Elimination Method, Gauss-Jordan Method,

Choleski's Method, Gauss-Seidal Iteration, Relaxation Method

(حلول المعادلات الجبرية الخطية المتزامنة)

طريقة الحذف الغاوسي، طريقة غاوس-جوردن،

طريقة تشوليسكي، تكرار غاوس-سيدال، طريقة الاسترخاء

Dr. Nida Hussein

The concept of solving systems of linear algebraic equations

Solving systems of simultaneous linear algebraic equations means finding the values of the variables that satisfy all the equations in the system at the same time.

- There are several methods for solving these systems, and they are usually divided into direct methods and indirect (iterroneous) methods.

مفهوم حلول أنظمة المعادلات الجبرية الخطية

حل أنظمة المعادلات الجبرية الخطية الآنية يعني إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع المعادلات في النظام في الوقت نفسه

- هناك عدة طرق لحل هذه الأنظمة، وتُقسم عادةً إلى طرق مباشرة وطرق غير مباشرة (تكرارية).

Dr. Nida Hussein

أولا: الطرق المباشرة First: Direct methods

✓ (Gaussian Elimination): الإزالة الغاوسية

- تقوم هذه الطريقة بتحويل مصفوفة النظام الموسعة إلى شكل مثلث علوي، والذي يمكن حله بعد ذلك عن طريق الاستبدال العكسي.

✓ (Gauss-Jordan Method): طريقة غاوس-جوردان:

- هي امتداد لطريقة الحذف الغاوسي، حيث تستمر العمليات الصفية لتحويل المصفوفة إلى شكل صفوف مخفضة، مما يعطي الحل مباشرة في الصف الأخير دون الحاجة إلى التعويض الخلفي.

✓ (Choleski's Method) : طريقة تشوليسكي :

- طريقة مباشرة لحل أنظمة المعادلات الخطية، مفيدة بشكل خاص للمصفوفات الموجبة المحددة المتماثلة، والتي تحلل المصفوفة إلى حاصل مصفوفة مثلثية سفلية ومنقولها .

ثانيا: الطرق غير المباشرة (الأساليب التكرارية) Second: Indirect methods (repetitive techniques)

✓ (Gauss-Seidal Method) :طريقة غاوس-سايدل :

- طريقة تكرارية تحل أنظمة المعادلات الخطية بتحديث الحل بشكل متكرر باستخدام أحدث القيم المحسوبة. غالبًا ما تكون أسرع من طريقة جاكوبي للنظام نفسه.

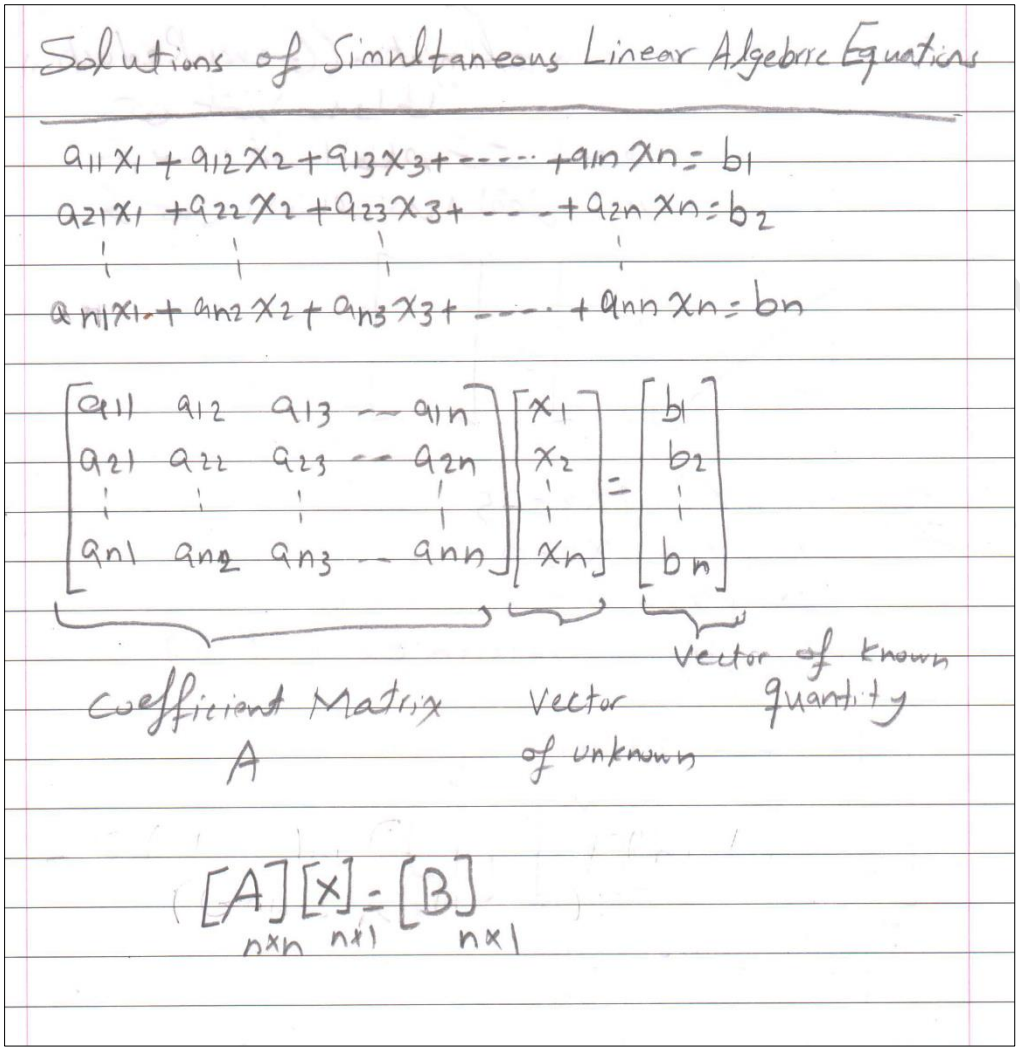
✓ (Relaxation Method) : طريقة الاسترخاء :

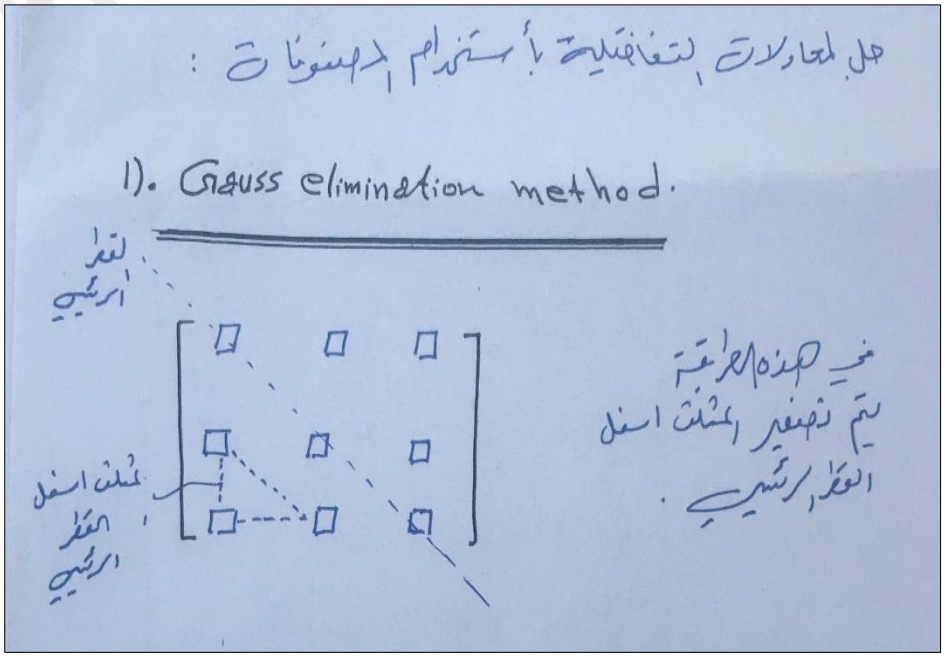
- طريقة تُستخدم لحل أنظمة المعادلات الخطية، وتُعرف عادةً بنوع من طرق التكرار ذات النقطة الثابتة .

Dr. Nida Hussein

الحذف الغاوسي (Gaussian Elimination)

وهي من الطرق المباشرة التي تستخدم دائما لحل أنظمة المعادلات الخطية عن طريق تحويل المصفوفة الموسعة للنظام إلى شكل صف متدرج بتصفير مثلث العناصر تحت القطر الرئيسي في مصفوفة [A] ونجعل العناصر على القطر unit أي تساوي 1.





Hussein

Ex: $x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$ —(1)

$-x_1 + 0 + 3x_3 = 0$ —(2)

$2x_1 + x_2 + 0 = 1$ —(3)

Solution by Gaussian Elimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ -x_0 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & x_3 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

اضف المعادلة (1) الى (2)

نضرب المعادلة (1) * 2 ونطرحه من (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 11 \end{bmatrix} \times -4$$

نضرب المعادلة رقم (2) * 3 ونطرحه من المعادلة (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -4 \end{bmatrix}$$

③ هي المعادلة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -4/11 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \Rightarrow x_1 = \frac{-12}{11}$

$\Rightarrow x_2 - 5x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{35}{11}$

$\Rightarrow x_3 = \frac{-4}{11}$

Ex: Solve The system of equation use Gauss elimindtion methed.

$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \quad \cdots (1)$$
$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 2 \quad \cdots (2)$$
$$7x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 4 \quad \cdots (3)$$

Sol:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & -7 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \end{array}\right] \quad R_1 * \frac{-1}{2} + R_2 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -10 & -\frac{1}{2} \\ 7 & 5 & 9 & 4 \end{array}\right] \quad R_1 * \frac{-7}{2} + R_3 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -10 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 19 & -12 & -13.5 \end{array}\right] \quad R_2 * \frac{-19}{5} + R_3 \longrightarrow$$

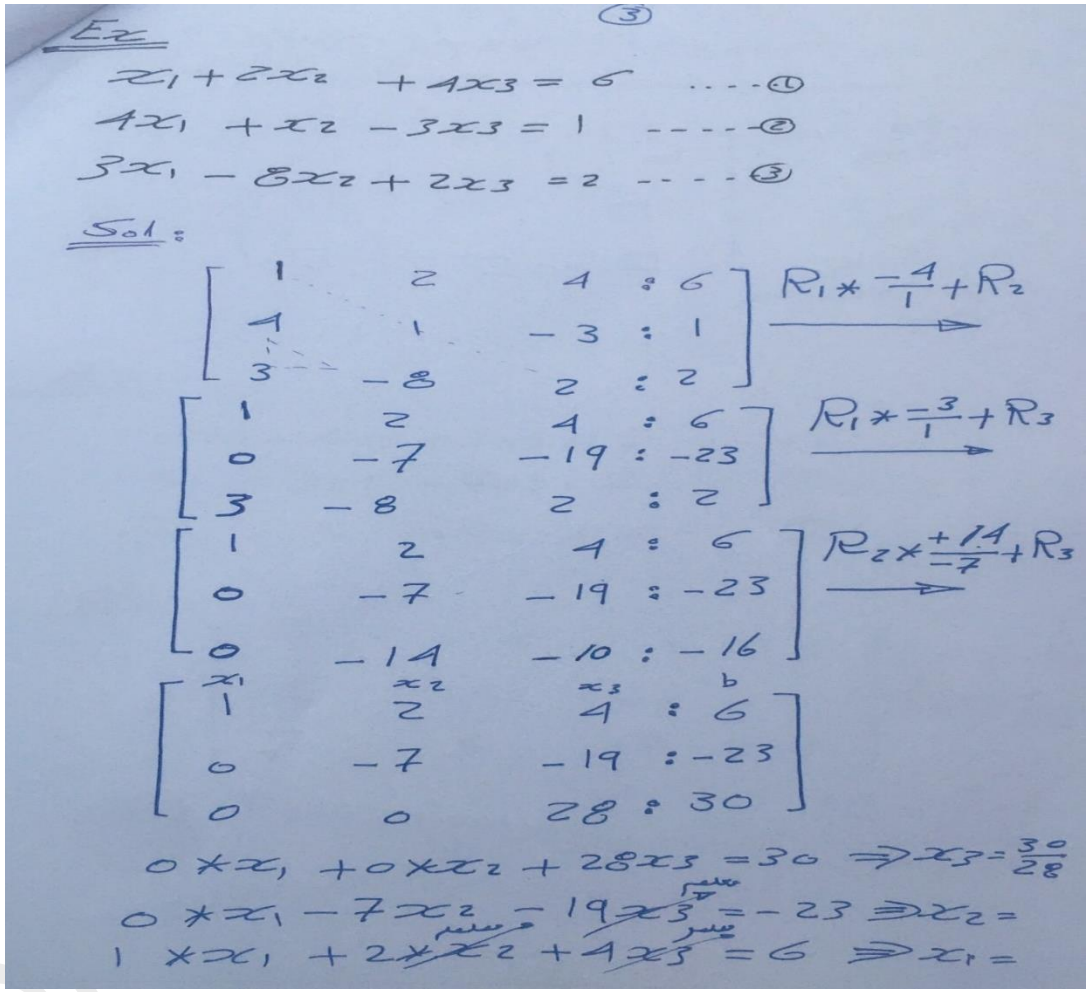
$$\begin{array}{ccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -10 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 26 & -\frac{58}{5} \end{array}\right]$$

$$0 * x_1 + 0 * x_2 + 26x_3 = -\frac{58}{5} \Rightarrow x_3 = -$$

$$0 * x_1 + 5 * x_2 - 10x_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -$$

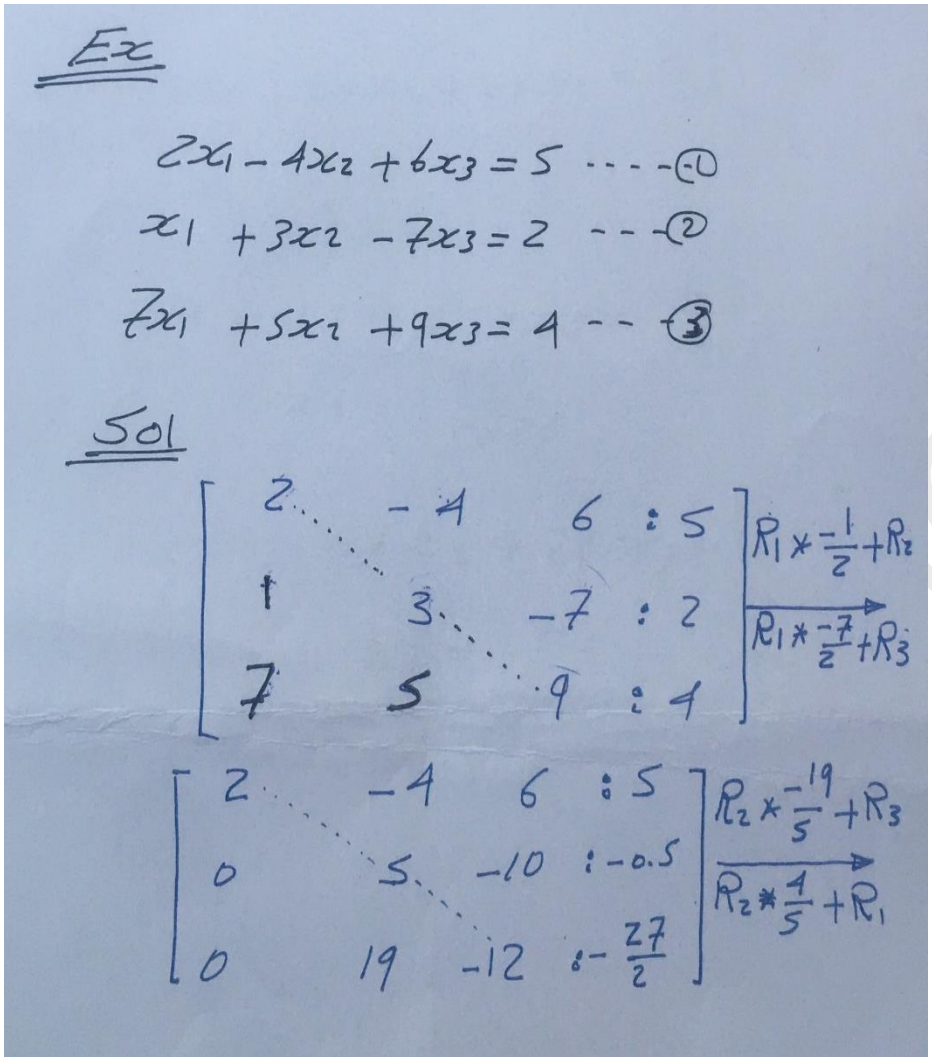
$$2 * x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = -$$

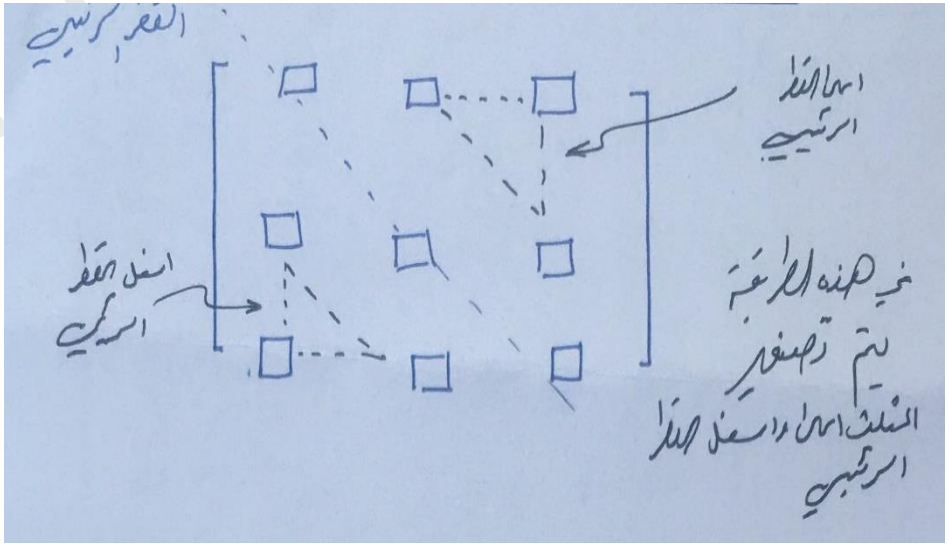


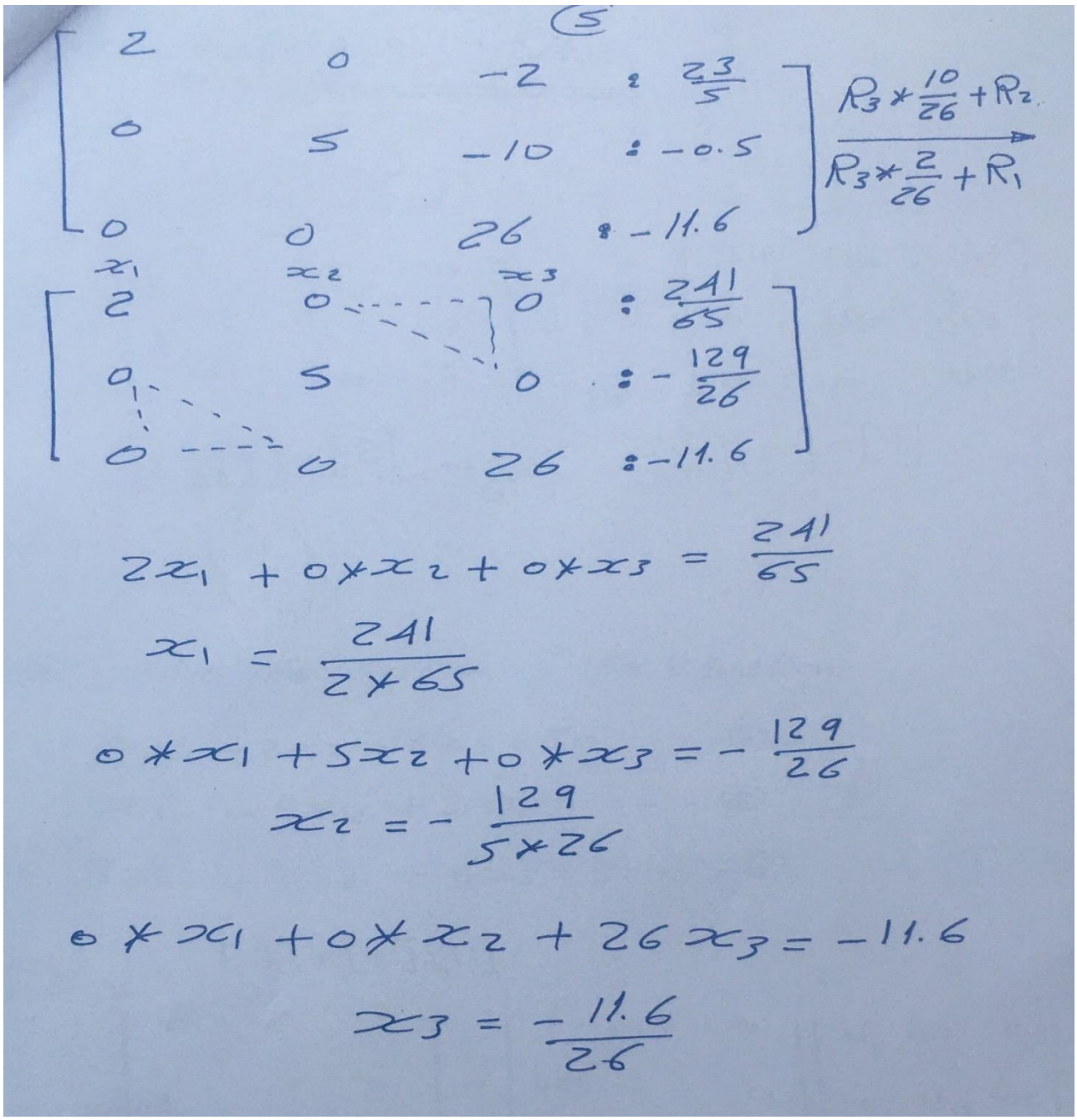
https://www.youtube.com/watch?v=-k5xaP88NOk

طريقة غاوس-جوردان: (Gauss-Jordan Method)

وهي من الطرق المباشرة التي تستخدم دائما لحل أنظمة المعادلات الخطية عن طريق تصفير مثلث العناصر تحت القطر الرئيسي واعلى القطر في مصفوفة [A] ونجعل العناصر على القطر unit أي تساوي 1.







https://www.youtube.com/watch?v=oaXWuO7zIQM

طريقة تشوليسكى (Choleski's Method)

وهي من الطرق المباشرة التي تستخدم دائما لحل أنظمة المعادلات الخطية تُستخدم لتفكيك مصفوفة معينة إلى حاصل ضرب مصفوفة مثلثية سفلية L ومنقولها L^T (L transfer) أي حل أنظمة المعادلات الخطية: بعد تحليل المصفوفة A إلى $L \cdot L^T$ حيث يمكن حل النظام $Ax=B$ على مرحلتين باستخدام التعويض الأمامي والخلفي، مما يجعلها طريقة سريعة وفعالة.

شروط استخدام طريقة تشوليسكي

لا يمكن تطبيق هذه الطريقة إلا على المصفوفات التي تستوفي الشروط التالية:

1. أن تكون المصفوفة **مربعة**.
2. أن تكون المصفوفة **متماثلة** (Symmetric)، أي أن $A = A^T$.
3. أن تكون المصفوفة **موجبة محددة** (Positive Definite)، وهذا يعني أن القيم الذاتية للمصفوفة كلها موجبة.

مبدأ الطريقة

إذا كانت المصفوفة A تستوفي الشروط المذكورة أعلاه، يمكن تحليلها إلى الشكل التالي:

$$A = L \cdot L^T$$

- A هي المصفوفة الأصلية المتماثلة والموجبة المحددة.
- L هي مصفوفة مثلثية سفلية (Lower Triangular Matrix)، أي أن جميع العناصر فوق القطر الرئيسي تساوي صفرًا.
- L^T هي منقول المصفوفة L، وتكون مصفوفة مثلثية علوية (Upper Triangular Matrix).

يجب أن تكون المدخلات القطرية للمصفوفة L موجبة تمامًا.

$$[A] = [L][U]$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} ; \quad [U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$[L][y] = [B]$ — النتائج $\qquad [U][x] = [y]$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

Ex: Solve The system of The equation:

$$8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30 \quad \text{----} (1)$$

$$x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 1 \quad \text{---} (2)$$

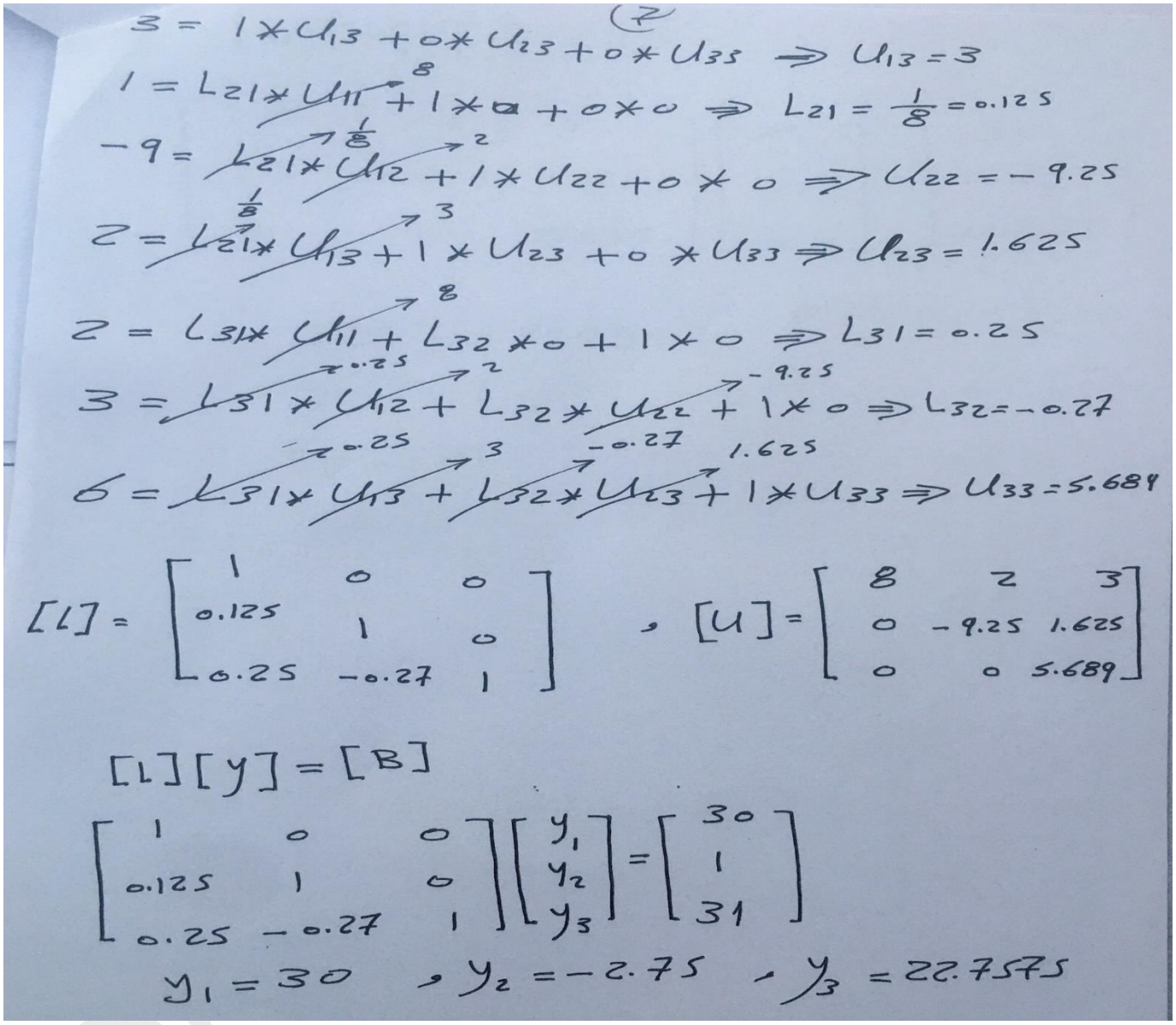
$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 31 \quad \text{---} (3)$$

Sol $\quad [A] = [L][U]$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & -9 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$8 = U_{11} * 1 + 0 * 0 + 0 * 0 \Rightarrow U_{11} = 8$$

$$2 = 1 * U_{12} + 0 * U_{22} + 0 * 0 \Rightarrow U_{12} = 2$$



https://www.youtube.com/watch?v=_gta8yXuMkU

https://www.youtube.com/watch?v=3aNn3JDMCiQ

https://www.youtube.com/watch?v=YdqcT1Eb_T4