جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

الطـــرق العـدديـــة
Numerical Methods

المستوى الثالث / الفصل الدراسي الخامس

أستاذ المادة

م. د. نداء حسين عبد عون

المحاضرة الثالثة

2025-2026

جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

(Roots of Equation)

Bisection Method, The Secant Method, Newton-Raphson Method, Modified Newton-Raphson Method.

(جذور المعادلات)

طريقة التنصيف (المقاطع الثنائية) ، طريقة القطع الوترية، طريقة نيوتن-رافسون، طريقة نيوتن-رافسون المعدلة.

Dr. Nida Hussein

مفهوم جذور المعادلات Roots of Equation

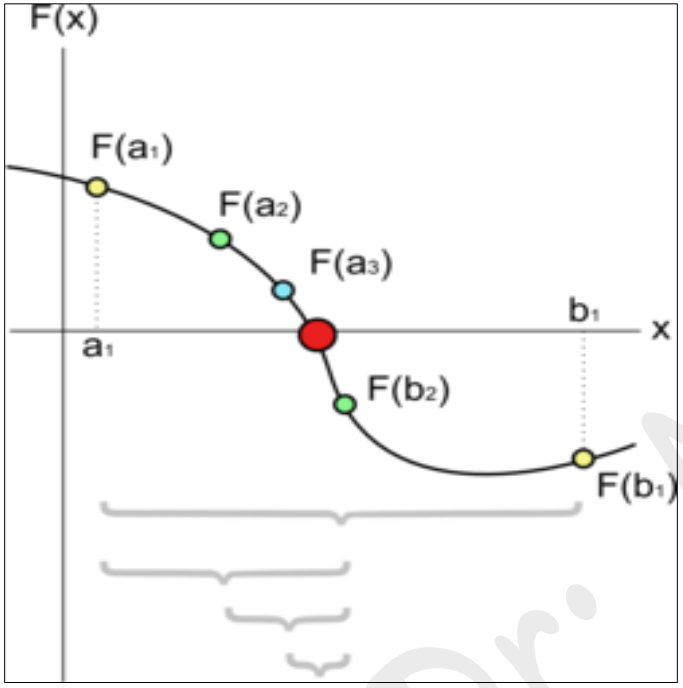
- ان معظم المعادلات التي تظهر خلال التطبيقات العملية تكون غير خطية وحل هذه المعادلات او إيجاد الجذور لها ليس بالأمر السهل لذلك نستخدم الطرائق العددية (Numerical Methods) لإيجاد هذه الجذور على الاقل قيم قريبة جدا لهذه الجذور وذلك بالبحث عن أصغر قيم X القريبة جدا من جذر المعادلة.
- الجذر (Root) هو قيمة X التي تحقق $f(x) = 0$
- ولكي نعين جذر المعادلة وبالدقة التي نريدها ... هناك عدة طرق لإيجاد الجذور القريبة لمثل هذه المعاملات والتي تدعى بالطرق التكرارية لحل المعادلات.(الهدف هو تقريب الجذر باستخدام خوارزميات عددية دقيقة وفعالة).

Dr. Aida Hussein

أولا: طريقة التنصيف(Bisection Method) (المقاطع الثنائية)

هي طريقة عددية بسيطة وموثوقة تُستخدم لإيجاد جذور الدوال او جذور المعادلات غير الخطية.

ولحل المعادلة بهذه الطريقة يجب ان تتوفر الشروط التالية:



a) أن تكون الدالة متصلة (لنفرض أن لدينا الدالة y=f(x) مستمرة ومعرفة في الفترة [a,b] ♥والتي نبحث فيها عن جذور المعادلة y).

b) أن تكون قيم الدالة عند طرفي الفترة الابتدائية [a,b] متعاكستين في الإشارة اي f(a) و f(b) لهما إشارتان مختلفتان حيث f(a)* f(b) < 0.

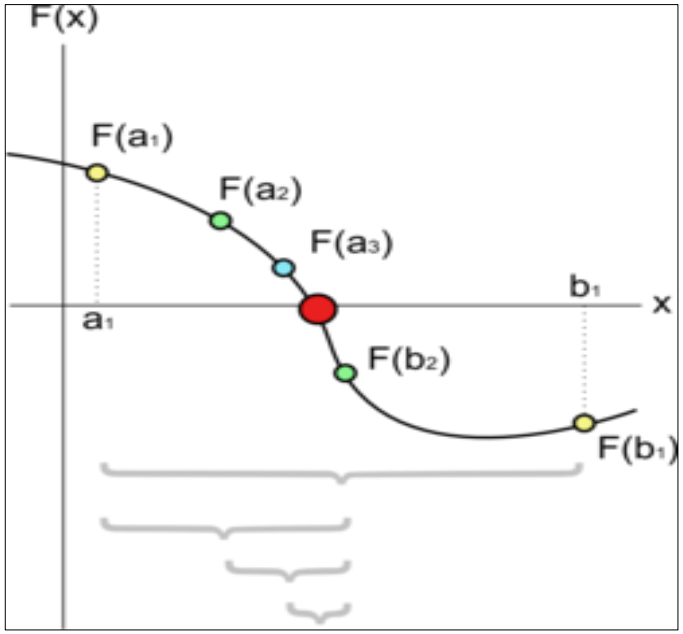
c)وجود الخطأ او نسبة الخطأ € .

♥ تكون قيمة a ادنى قيمة بالفترة (XL) اما قيمة b فهي اعلى قيمة بالفترة (Xu).

It is a simple and reliable numerical method used to find the roots of functions or the roots of nonlinear equations.

To solve an equation using this method, the following conditions must be met:

a) The function must be continuous (suppose we have the function f(x) = y, which is continuous and defined in the interval [a, b], in which we are searching for the roots of the equation y).



b) The values of the function at the endpoints of the initial interval [a, b] must be of opposite signs, i.e., f(a) and f(b) have different signs, such that f(a) * f(b) < 0.

c) The presence of an error or the percentage error.€

Dr. Nida Hussein

طريقة الحل:

- حساب نقطة المنتصف: احسب نقطة المنتصف القيمتان a,b المعرف عندهما الدالة وليكن C او (Xr) حيث أن C=(a+b)/2. او Xr= (XL+Xu)/2
- اختبار قيمة الدالة عند المنتصف:
  - إذا كانت قيمة f(Xr)= 0 فإن Xr جذر للدالة f(x) وحلا لها وتنتهي الطريقة.
  - إذا لم يتحقق الشرط السابق نقوم باتباع التالي:
    1. إذا كانت f(b)* f(Xr) < 0 فإننا نضع a = Xr لنقترب من الحل.
    2. إذا كانت f(a)* f(Xr) < 0 فإننا نضع b = Xr لنقترب من الحل.
- نقوم بتكرار الخطوتين 1 و2.
- تتوقف العملية التكرارية عندما يتحقق أحد شروط التوقف، وهي:
  - يكون الخطأ المطلق في الفترة الجديدة صغيراً جداً (أقل من الخطأ المسموح به€). $|b-a| \le €$ او نسبة الخطأ النسبي اقل من النسبة المسموحة (P).
  - تكون قيمة الدالة عند نقطة المنتصف قريبة جداً من الصفر. $|f(Xr)| \le €$
- المزايا :بسيطة ومضمونة التقارب.
- العيوب :بطيئة نسبياً.

Dr. Nida Hussain

Ex1: Find the roots of the equation by the Bisection method for [5,10] and Percent Relative error (P= 5%).

$$f(x) = -0.4X^2 + 2.2X + 4.7 \ .$$

الحل:

1-تدقيق شروط الطريقة.

2- نعمل جدول

i	X_L	$f(X_L)$	Xu	$f(X_u)$	X_r	$f(X_r)$	P
1	5	5.7	10	-13.3	7.5	-1.3	-
2	5	5.7	7.5	-1.3	6.25	2.825	20%
3	6.25	2.825	7.5	-1.3	6.875	0.91875	9.09%
4	6.875	0.91875	7.5	-1.3	7.1875	-0.1516	4.35%

Xr = 7.1875

Dr. Nidal Hussein

Ex2: Find the roots of the equation by the Bisection method for [1,2] and error € $|f(Xr)|$ = 0.01.

$f(x) = X^2 - 3$

i	X_L	$f(X_L)$	Xu	$f(X_u)$	X_r	$f(X_r)$
1	1	-2	2	1	1.5	-0.75
2	1.5	-0.75	2	1	1.75	0.0625
3	1.5	-0.75	1.75	0.0625	1.625	-0.359
4	1.625	-0.359	1.75	0.0625	1.6875	-0.1523
5	1.6875	-0.1523	1.75	0.0625	1.7188	-0.0457
6	1.7188	-0.0457	1.75	0.0625	1.7344	0.0081
7	1.7188	-0.0457	1.7344	0.0081	1.7266	-0.0189

نلاحظ ان الجذر المطلوب هو **Xr= 1.7344** لان شرط التوقف $|f(Xr)|$ = 0.0081 وهو اقل من $|f(Xr)|$ = 0.01 € .

H.W 3.1 Using Bisection method, find the root of the equation f(x) in the interval [2,3],

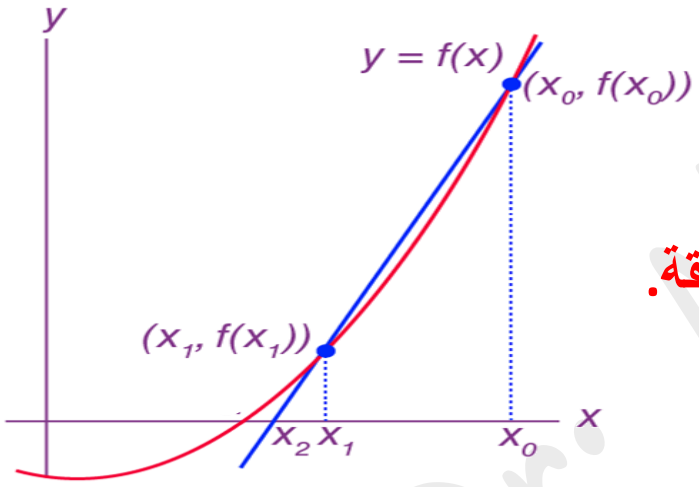
$f(x)=-4x+9x^3$ and error € |f(Xr)| = 0.01.

Dr. Nidal Hussein

ثانيا: طريقة القاطع The Secant Method

- هي طريقة تكرارية في التحليل العددي تُستخدم لإيجاد الجذور التقريبية لدالة حقيقية القيمة f(x)=0.
- تعتمد على نقطتين ابتدائيتين:(استخدام ميل خط القاطع المار عبر نقطتين على منحنى الدالة).
- نطبق القانون $$X_{i+1} = X_i - f(Xi) * \frac{(Xi - X\,i_{-1})}{(f(Xi) - f(X\,i_{-1}))}$$

حيث i=1,2,3,4,...



- تستخدم طريقة القاطع تقريبين أوليين للجذر ونكرر الطريقة.
- مناسبة عندما يصعب حساب المشتقة للدالة.
- المزايا: بسيطة ومضمونة التقارب.
- العيوب: بطيئة نسبياً.

Dr. Nida Hussein

خطوات التطبيق

1. عرّف الدالة f(x).
2. اختر قيمتين تقريبيتين أوليتين X_0 وX_1 بالقرب من الجذر المتوقع.
3. طبّق الصيغة التكرارية لحساب التقريب التالي: X_2
4. استمر في التكرار: في الخطوة التالية، يتم استبدال أقدم تقريب أي X_0 بالتقريب الجديد أي X_2 ولحساب X_3 استخدم X_1 وX_2 .
5. توقف عندما يكون الفرق المطلق بين تقريبين متتاليين أصغر من قيمة خطا محدد أي نتوقف عندما تكون $|X_i - X_{i-1}| < \epsilon$ او هو يحدد في السؤال عدد التكرارات .

Dr. Nida Hussein

Example1: Find the root of the equation $f(x) = x^{\wedge 2} - 4$ using the secant method, starting with $X_0 = 1$ and $X_1 = 3$. (The actual root is X=2.)

Compute two iterations.

i	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}
1	$x_0=1$	$x_1=3$	$f(1)=-3$	$f(3)=5$	$x_2=1.75$
2	$x_1=3$	$x_2=1.75$	$f(3)=5$	$f(1.75)=-0.9375$	$x_3=2.0476$

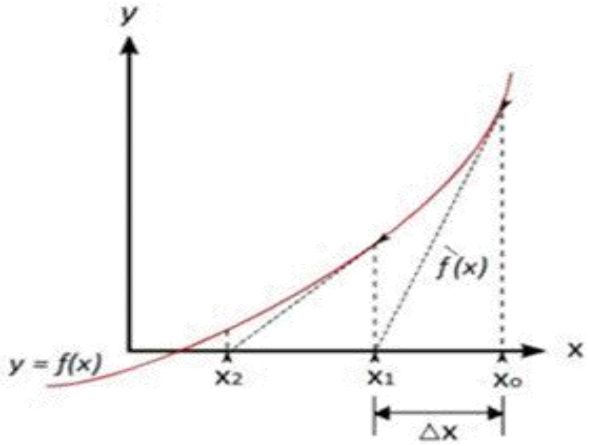
نلاحظ أن التقريب X_3 approx=Xr= 2.0476 أصبح قريباً جداً من الجذر الفعلي 2 في تكرارين فقط.

H.W 3.2: using the secant method for the function $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$, in which the real roots of the equation f(x) use $X_0=1$, $X_1=0$. Compute three iterations.

Dr. Nida Hussein

ثالثا :طريقة نيوتن – رافسون (Newton–Raphson Method)

- في التحليل العددي، طريقة نيوتن-رافسون هي خوارزمية فعالة لإيجاد الجذور
- تفترض هذه الطريقة ان الدالة مستمرة ولها مشتقة واحدة فقط في كل نقطة من نقاطها
- تعتمد الطريقة على مفهوم المشتقة الأولى(x) f ' وخط المماس.
- الصيغة $X_{i+1} = X_i - * \frac{f(Xi)}{f\prime(Xi)}$. i= 0,1,2,3,....
- نحدد شرط التوقف $|X_i - X_{i+1}| \leq €$
- المزايا :سريعة جداً في التقارب.
- العيوب :تتطلب اشتقاقاً وقد تفشل إذا كان التخمين بعيداً.



ملاحظة: يعطي في السؤال قيمة ال Xo مع ملاحظة ان لا تكون قيمة المشتقة مساوية للصفر.

Dr. Nida Hussain

Ex: Find the root at the function $f(x)= X^2-5X+6$ use $Xo=1$ and $P=1\%$ as accuracy by using Newton Raphson Method.

$f(x)= X^2-5X+6$

$f'(Xi)= 2X-5$

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(Xi)}{f'(Xi)}$$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	P
$x_0=1$	2	-3	1.66667	40%
1.66667	0.44444	-1.66666	1.93334	13.79%
1.93334	0.07110	-1.13332	1.99608	3.14%
1.99608	0.00394	-1.00784	1.99998	0.195%

$Xr= 1.99998$, $0.195\% < 1\%$.

Dr. Nida Hussein

Example: Solve the following function $x^2 + 1 = 3x$ by Newton– Raphson method.

$f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x - 3 \quad let \quad x_o = 1$

i	X_i	$f(X_i)$	$f'(X_i)$	$\frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$	X_{i+1}
0	**1.0000**	-1.0000	-1.0000	1.0000	0.0000
1	0.0000	1.0000	-3.0000	-0.3333	0.3333
2	0.3333	0.1111	-2.3333	-0.0476	0.3810
3	0.3810	0.0023	-2.2381	-0.0010	0.3820
4	0.3820	0.0000 (1.0265×10^{-6})	-2.2361	0.0000 (-4.5907×10^{-7})	0.3820

Waleed A. Abbas

To find another value of (x):

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x - 3 \qquad let \quad x_o = 2$$

i	X_i	$f(X_i)$	$f'(X_i)$	$\frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$	X_{i+1}
0	2.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	3.0000
1	3.0000	1.0000	3.0000	0.3333	2.6667
2	2.6667	0.1111	2.3333	0.0476	2.6190
3	2.6190	0.0023	2.2381	0.0010	2.6180
4	2.6180	0.0000	2.2361	0.0000	2.6180

Prof. Dr.

Example: Find the positive solution of : $2\ \sin x = x$ by Newton – Raphson method starting from $x_o = 2$.

Solution:

$$f(x) = x - 2\sin x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 - 2\cos x$$

i	X_i	$f(X_i)$	$f'(X_i)$	$\frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$	X_{i+1}
0	2	0.181405	1.832293	0.09900	1.90099
1	1.90099	9.0391×10^{-3}	1.648462	5.48335×10^{-3}	1.89551
2	1.89551	2.577×10^{-5}	1.638074	1.573188×10^{-5}	1.89549
3	1.89549	-6.99×10^{-6}	1.638037	-4.26730×10^{-6}	1.89549

HW 3.3: Find the root at the equation $f(x)=e^{-x}-(\sin\frac{\pi}{2}x)$, use $xo=1$ and $\epsilon=0.0001$ as accuracy by using Newton Raphson Method.

رابعا: طريقة نيوتن-رافسون المعدلة Modified Newton-Raphson Method

طريقة نيوتن-رافسون المعدلة هي تعديل على طريقة نيوتن-رافسون الكلاسيكية، وتُستخدم عادةً في سياقات مختلفة لمعالجة بعض نقاط ضعف الطريقة الأصلية. توجد عدة أنواع من التعديلات، ولكن أشهرها يهدف إلى تسريع التقارب أو تحسين الاستقرار عند التعامل مع جذور متعددة أو في التحليل الإنشائي .

الصيغة

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(Xi)\, f'(Xi)}{\{f'(Xi)\}^2 - f(Xi) f''(Xi)}$$

i= 0,1,2,3,....

Dr. Nida Hussein

Ex: Find the root at the function $f(x)=X^3-5X^2+7X-3$ use $Xo=0$ and $P=0.5\%$ as accuracy by using Modified Newton Raphson Method.

$f(x)=X^3-5X^2+7X-3$

$f'(Xi)=3X^2-10X+7$

$f''(Xi)=6X-10$

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(Xi)\, f'(Xi)}{\{f'(Xi)\}^2 - f(Xi) f''(Xi)}$$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(Xi)$	X_{i+1}	P
$x_0=0$	- 3	7	-10	1.10526	100%
1.10526	- 0.02099	-0.3878	-3.36844	1.00311	10.18%
1.00311	-0.00002	-0.01241	-3.98134	0.99977	0.33%

$Xr= 0.99977$, $0.33\% < 0.5\%$.

HW 3.4: use $X_0 = 4$ for the example above instead of $Xo=0$.

Dr. Nuha Hussein