جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

# الطـــرق العـدديـــة
# Numerical Methods

## المستوى الثالث / الفصل الدراسي الخامس

أستاذ المادة

م. د. نداء حسين عبد عون

## المحاضرة الثانية

## 2025-2026

جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

# Interpolation

## Gregory-Newton's Formula, Newton's Divided Difference, Lagrange Formula, Least Square Method.

## الاستيفاء (الاستكمال)

## صيغة جريجوري- نيوتن، الفرق المقسوم لنيوتن، صيغة لاغرانج، طريقة المربعات الصغرى.

Dr. Nida Hussein

# Interpolation

**Interpolation is a mathematical and statistical process of estimating unknown values between known data points, using other known values to form a trend or curve. The goal is to "fill in the gaps" in the data by calculating a value at an unmeasured point based on values at neighboring points. Various techniques, such as linear interpolation or polynomial interpolation, are used to approximate a function between known points.**

***الاستيفاء (Interpolation) هو عملية رياضية وإحصائية لتقدير قيم مجهولة تقع بين نقاط بيانات معروفة، وذلك باستخدام القيم المعروفة الأخرى لتشكيل اتجاه أو منحنى. الهدف هو "ملء الفراغات" في البيانات عن طريق حساب قيمة عند نقطة غير مُقاسة بناءً على القيم في النقاط المجاورة. تُستخدم تقنيات متنوعة مثل الاستيفاء الخطي أو الاستيفاء متعدد الحدود لتقريب الدالة بين النقاط المعروفة .**

---

* إذا كانت المعلومات المتوفرة لنا لعدد سكان العراق مثلا هي فقط في السنوات 1934,1947,1957,1965,1977,1997, فاذا أردنا تقدير عدد سكان العراق في العام 1940 أو 1955 على ضوء البيانات المتوفرة تسمى بالازدواج أو الاستيفاء (Interpolation). أما إذا أردنا تخمين عدد سكان العراق في سنه 2000 أو 1920 على ضوء البيانات المعطاة تسمى بالاستقسام (تنبؤ) (Extrapolation).

## 1. Gregory-Newton's Formula  1. صيغة جريجوري- نيوتن

The Gregory-Newton Formula, also known as the **Newton-Gregory Forward Interpolation Formula**, is a mathematical method for approximating the value of a function at a point **within a set of equally spaced data points**. It uses finite differences to create a polynomial that fits the known data, allowing for educated guesses about values that lie between those points.

صيغة جريجوري-نيوتن، هي طريقة رياضية لتقريب قيمة دالة عند نقطة ضمن مجموعة من **نقاط البيانات المتساوية المسافات**. تستخدم هذه الصيغة الفروقً المحدودة لإنشاء متعددة حدود تناسب البيانات المعروفة، مما يسمح بتخمينات مدروسة للقيم الواقعة بين هذه النقاط. سميت الصيغة على اسم عالمي الرياضيات جيمس جريجوري وإسحاق نيوتن ، اللذين طورا بشكل مستقل تقنيات استيفاء مماثلة.

Dr. Nida Hussein

## How it Works

1. **Equally Spaced Data:**

The formula requires data points $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, ..., $(x_n, y_n)$ where the x-values are at equal intervals ($x_i = x_0 + rh$).

2. **Finite Differences:**

A forward difference table is created to calculate the differences between successive y-values, then the differences of those differences, and so on.

3. **Interpolating Polynomial:**

The formula uses these finite differences to construct a polynomial that passes through the given data points.

4. **Approximation:**

This polynomial can then be used to find an approximate value for f(x) at any **x-value between the known data points.**

5. **Formula for Forward Interpolation**

The formula is: $\mathbf{f(x) \approx f_0 + r\,\Delta f_0 + (r(r-1)/2!)\,\Delta^2 f_0 + (r(r-1)(r-2)/3!)\,\Delta^3 f_0 + \ldots + (r(r-1)\ldots(r-n+1)/n!)\,\Delta^n f_0}$

Where:

- **f(x)**: is the function value to be approximated.
- **x**: is the point where the approximation is needed.
- $\mathbf{x_0}$: is the first data point.
- **h**: is the constant interval between x-values.
- **r** = $(x - x_0) / h$, a dimensionless quantity.
- $\mathbf{\Delta f_0}$: is the first forward difference at $f_0$.

Dr. Nida Hussein

- $\Delta^2 f_o, \Delta^3 f_o, \ldots \Delta^n f_o$: are higher-order forward differences.

**6. Formula for Backward Interpolation**

The Gregory-Newton posterior formula is a mathematical formula used to estimate the value of a function at a point near the end of a table of known points. It relies on the use of "posterior differences" (∇) from the posterior difference table. This formula is used when the desired point is near the end of the data, unlike the forward formula, which is used when the point is near the beginning.

**كيفية العمل**

1. **البيانات المتساوية المسافات**: تتطلب الصيغة نقاط بيانات $(x_o ،y_o)$ ، $(x_1 ،y_1)$ ، ... ،$(x_n ،y_n)$ حيث تكون قيم x على **فترات متساوية** $(x_i = x_o + rh)$.
2. **الفروق المحدودة**: يُنشأ جدول فروق محدودة لحساب الفروق بين قيم y المتتالية، ثم فروق هذه الفروق، وهكذا.
3. **استيفاء متعدد الحدود**: تستخدم هذه الصيغة الفروق المحدودة لإنشاء متعددة حدود تمر عبر نقاط البيانات المعطاة.
4. **التقريب:** يمكن استخدام هذه المتعددة الحدود لإيجاد قيمة تقريبية لـ f(x) عند أي قيمة **x بين نقطتي البيانات المعروفتين**.

Dr. Nida Hussein

## 5. صيغة الاستيفاء الأمامي

صيغة غرغوري نيوتن الأمامية هي صيغة استيفاء تستخدم لتقدير قيمة الدالة عند نقطة قريبة من بداية جدول بيانات، وتعتمد على الفروق الأمامية لتقدير القيمة. تستخدم هذه الصيغة عندما تكون البيانات **متباعدة بمسافات متساوية**، وتعطي تقديرًا تقريبيًا للقيمة المطلوبة وهي:

$$f(x) \approx f_o + (r/1!)\,\Delta f_o + (r(r-1)/2!)\,\Delta^2 f_o + (r(r-1)(r-2)/3!)\,\Delta^3 f_o + \ldots + (r(r-1)\ldots(r-n+1)/n!)\,\Delta^n f_o$$

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | | | | | |
| | | $\Delta y_0$ | | | | |
| $x_1$ | $y_1$ | | $\Delta^2 y_0$ | | | |
| | | $\Delta y_1$ | | $\Delta^3 y_0$ | | |
| $x_2$ | $y_2$ | | $\Delta^2 y_1$ | | $\Delta^4 y_0$ | |
| | | $\Delta y_2$ | | $\Delta^3 y_1$ | | $\Delta^5 y_0$ |
| $x_3$ | $y_3$ | | $\Delta^2 y_2$ | | $\Delta^4 y_1$ | |
| | | $\Delta y_3$ | | $\Delta^3 y_2$ | | |
| $x_4$ | $y_4$ | | $\Delta^2 y_3$ | | | |
| | | $\Delta y_4$ | | | | |
| $x_5$ | $y_5$ | | | | | |

حيث:

f(x): هي قيمة الدالة المطلوب تقريبها.

x: هي النقطة التي يتطلب فيها التقريب وتكون اقرب لبدايات قيم الـ x.

$x_o$: هي أول نقطة بيانات.

h: هي الفاصل الثابت بين قيم (x) ، حيث $(h=x_1-x_0)$

$r = (x - x_o) / h$، وهي كمية بلا أبعاد. و$0 < r < 1$.

$\Delta f_o$: هو أول فرق أمامي عند $f_o$.

$\Delta^2 f_o$، $\Delta^3 f_o$، $\Delta^n f_o$ ...: هي فروق أمامية من الدرجة الأعلى.

## 6. صيغة الاستيفاء التراجعي Newton's Back-Word Interpolation formula

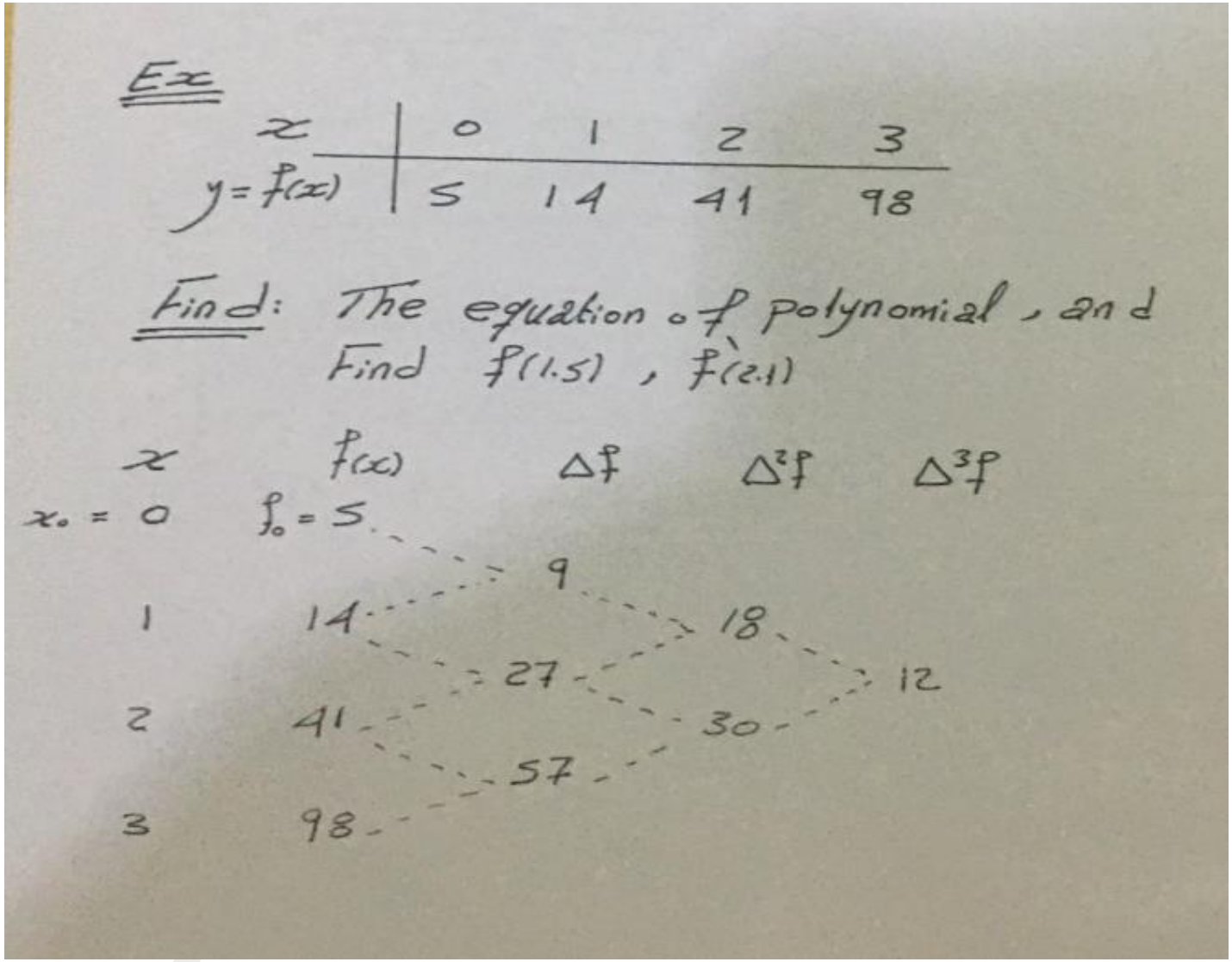
صيغة غرغوري نيوتن الخلفية هي صيغة رياضية تستخدم لتقدير قيمة دالة عند نقطة قريبة من نهاية جدول من النقاط المعروفة، وتعتمد على استخدام "الفروق الخلفية" (∇) من جدول الفروق الخلفية .يتم استخدام هذه الصيغة عندما تكون النقطة المطلوبة قريبة من نهاية البيانات، على عكس الصيغة الأمامية التي تستخدم عندما تكون النقطة قريبة من البداية .

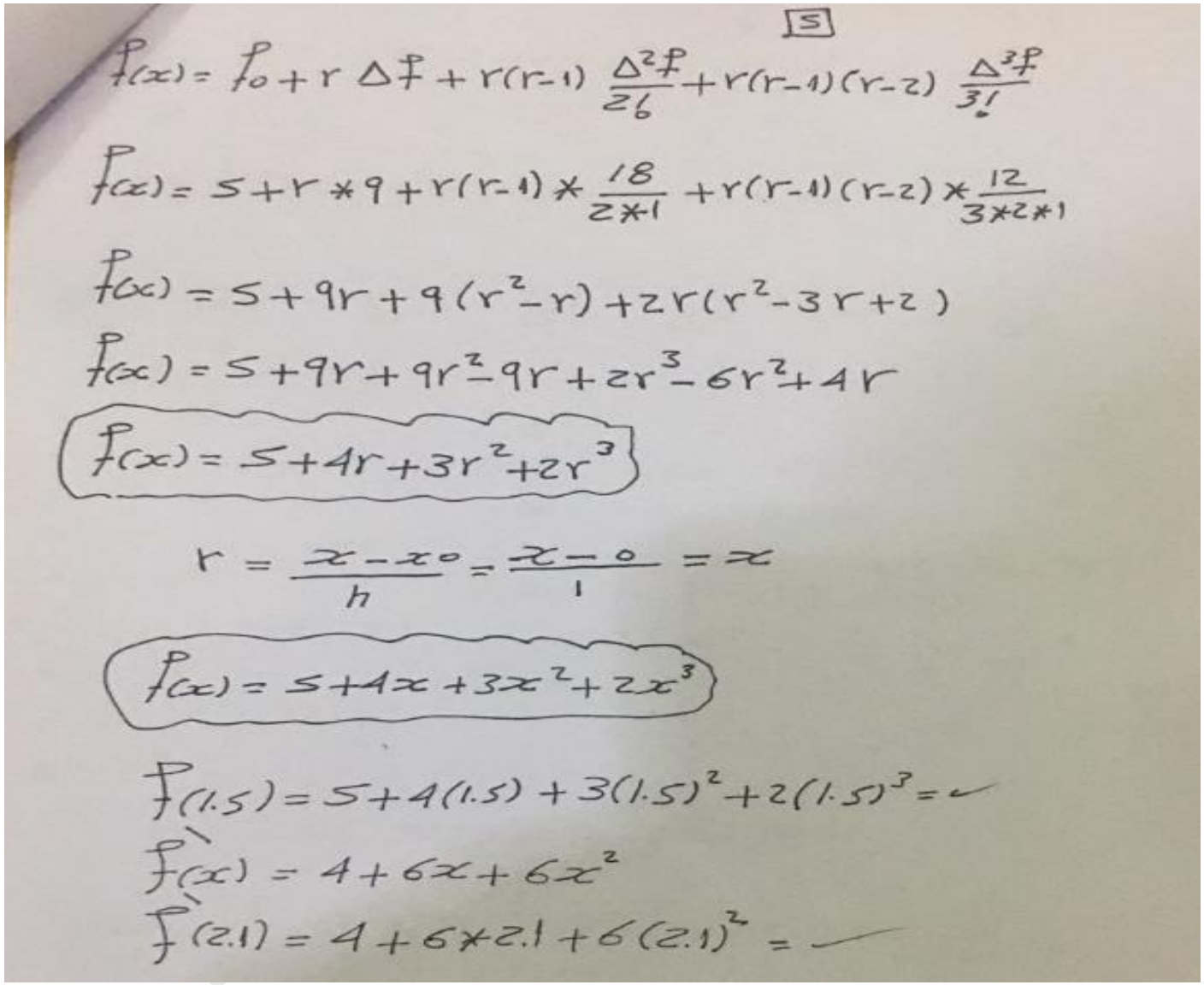
$$f(x) \approx f_n + (r/1!)\,\nabla f_n + (r(r+1)/2!)\,\nabla^2 f_n + (r(r+1)(r+2)/3!)\,\nabla^3 f_n + \ldots + (r(r+1)\ldots(r+n+1)/n!)\,\nabla^n f_n$$

| $x$ | $y$ | $\nabla y$ | $\nabla^2 y$ | $\nabla^3 y$ | $\nabla^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | | | | |
| | | $\nabla y_1$ | | | |
| $x_1$ | $y_1$ | | $\nabla^2 y_2$ | | |
| | | $\nabla y_2$ | | $\nabla^3 y_3$ | |
| $x_2$ | $y_2$ | | $\nabla^2 y_3$ | | $\nabla^4 y_4$ |
| | | $\nabla y_3$ | | $\nabla^3 y_4$ | |
| $x_3$ | $y_3$ | | $\nabla^2 y_4$ | | |
| | | $\nabla y_4$ | | | |
| $x_4$ | $y_4$ | | | | |

$$r = (x - x_n) / h$$
$$(h = x_1 - x_0)$$

امثلة 1


Ex
x | 0 1 2 3
y = f(x) | 5 14 41 98
Find: The equation of polynomial, and
Find f(1.5), f(2.1)
x f(x) Δf Δ²f Δ³f
x₀ = 0 f₀ = 5
9
1 14 18
27 12
2 41 30
57
3 98



[5]

$$f(x) = f_0 + r\,\Delta f + r(r-1)\frac{\Delta^2 f}{2!} + r(r-1)(r-2)\frac{\Delta^3 f}{3!}$$

$$f(x) = 5 + r*9 + r(r-1)*\frac{18}{2*1} + r(r-1)(r-2)*\frac{12}{3*2*1}$$

$$f(x) = 5 + 9r + 9(r^2 - r) + 2r(r^2 - 3r + 2)$$

$$f(x) = 5 + 9r + 9r^2 - 9r + 2r^3 - 6r^2 + 4r$$

$$f(x) = 5 + 4r + 3r^2 + 2r^3$$

$$r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0}{1} = x$$

$$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$$

$$f(1.5) = 5 + 4(1.5) + 3(1.5)^2 + 2(1.5)^3 = \checkmark$$

$$f'(x) = 4 + 6x + 6x^2$$

$$f'(2.1) = 4 + 6*2.1 + 6(2.1)^2 = \checkmark$$

## Example

2- The population of a certain town is as follows

| Year : $x$ | 1941 | 1951 | 1961 | 1971 | 1981 | 1991 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Population in lakhs : $y$ | 20 | 24 | 29 | 36 | 46 | 51 |

Using appropriate interpolation formula, estimate the population during the period 1946.

$h = (x_1 - x_0) = 1951 - 1941 = 10$

$r = (x - x_o) / h$

$r = (1946 - 1941) / 10 = 0.5$

$$f(x) \approx f_o + (r/1!)\,\Delta f_o + (r(r-1)/2!)\,\Delta^2 f_o + (r(r-1)(r-2)/3!)\,\Delta^3 f_o + \ldots + (r(r-1)\ldots(r-n+1)/n!)\,\Delta^n f_o$$

Dr. Nida Kazmi

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1941 | 20 | | | | | |
| | | 4 | | | | |
| 1951 | 24 | | 1 | | | |
| | | 5 | | 1 | | |
| 1961 | 29 | | 2 | | 0 | |
| | | 7 | | 1 | | -9 |
| 1971 | 36 | | 3 | | -9 | |
| | | 10 | | -8 | | |
| 1981 | 46 | | -5 | | | |
| | | 5 | | | | |
| 1991 | 51 | | | | | |

$$y_{(x=1946)} = 20 + \frac{0.5}{1!}(4) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(1) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(1)$$

$$+ \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!}(0) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(0.5-4)}{5!}(-9)$$

**Example: Find the value of the polynomial, then find the estimated value at the point x=2.9.**

**مثال: أوجد قيمة متعدد الحدود، ثم أوجد القيمة التخمينية عند النقطة x=2.9.**

| xi | Y i | $\nabla f_i$ | $\nabla^2 f_i$ | $\nabla^3 f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| 1 | 2 | | 1 | |
| | | 2 | | -2 |
| 2 | 4 | | -1 | |
| | | 1 | | |
| 3 | 5 | | | |

$$f(x) \approx f_n + (r/1!)\,\nabla f_n + (r\,(r+1)/2!)\,\nabla^2 f_n + (r\,(r+1)\,(r+2)/3!)\,\nabla^3 f_n + \ldots + (r\,(r+1)\ldots(r+n+1)/n!)\,\nabla^n f_n$$

$$P_3(x) = y_n + \frac{r}{1!}\nabla y_n + \frac{r\,(r\,+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{r\,(r\,+1)(r\,+2)}{3!}\nabla^3 y_n$$

$$r = \frac{x - x_n}{h}$$

$$r = \frac{x - 3}{1}$$

$$f_3(x) = 5 + (x-3)(1) + \frac{(x-3)(x-2)}{2}(-1) + \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{6}(-2)$$

$$P_3(2.9) = 5.002$$

Dr. Nida Hussein

واجب بيتي 2.3

- السؤال الأول/ للبيانات التالية جد متعددة الحدود التقريبية بطريقة نيوتن غريغوري للاستكمال للخلف وجد قيمة y عندما x=46 .

| x | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 12 | 15 | 20 | 27 | 39 | 52 |

- السؤال الثاني / / للبيانات التالية جد متعددة الحدود التقريبية بطريقة نيوتن غريغوري للاستكمال للخلف وجد قيمة y عندما x=1.5 .

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| y | 2 | -1 | 4 |

## 2. Newton's Divided Difference  2. الفرق المقسم لنيوتن

لتقدير دالة في نقطه ما ($x^*$) بالاعتماد على جدول الفروقات النسبية نتبع الصيغة الرياضية الأتية:

$$f_{(x^*)} = y_0 + (x^* - x_0)\Delta y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)\Delta^2 y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)\Delta^3 y_0 + \cdots$$

**Example**

**From the following data find the table of the divided difference and use to find f (0.5), f (2), f (5)?**

| x | y | Δ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| | | 1 | | |
| 1 | 1 | | 4 | |
| | | 13 | | 1 |
| 3 | 27 | | 8 | |
| | | 37 | | |
| 4 | 64 | | | |

$f_{(0.5)}$ =0+(0.5-0) (1) + (0.5-0) (0.5-1) (4) + (0.5-0) (0.5-1) (0.5-3) (1) =0+0.5-1+0.625=0.125

$$f_{(2)} = 0 + (2-0)(1) + (2-0)(2-1)(4) + (2-0)(2-1)(2-3)(1) = 2 + 8 - 2 = 8$$

$$f_{(5)} = 0 + (5-0)(1) + (5-0)(5-1)(4) + (5-0)(5-1)(5-3)(1)$$
$$= 0 + 5 + 80 + 40 = 125$$

Dr. Nida Hussain

## 3. Lagrange's Formula

## 3. صيغة لاغرانج

Interpolation using Lagrange's formula is a method for finding a polynomial that passes through a set of given data points, allowing the values of the function to be estimated at intermediate points within the range of this data.

**الاستيفاء باستخدام صيغة لاغرانج هو طريقة لإيجاد متعددة الحدود تمر عبر مجموعة من نقاط البيانات المعطاة، مما يسمح بتقدير قيم الدالة عند نقاط وسيطة داخل نطاق هذه البيانات.**
**تُبنى هذه الصيغة باستخدام "متعددات حدود أساس لاغرانج".**

متى تستخدم استيفاء لاغرانج؟

- **لتقريب الدوال :**

يُمكن استخدامها لتقريب الدوال المعقدة باستخدام متعدد الحدود الأبسط، مما يسهل تحليلها وتكاملها .

- **لتقدير القيم :**

لتقدير قيمة دالة عند نقطة تقع بين نقاط البيانات المعروفة .

- **للتطبيقات العملية :**

لها دور أساسي في الأساليب العددية، وهي أساس لمفاهيم أخرى مثل صيغ التكامل العددي .

Dr. Nida Hussein

## شرح صيغة لاغرانج لإيجاد متعدد الحدود Lagrange Interpolation Polynomials

عندما تكون قيم x **غير متساوية المسافة** أي ان $\Delta x$ **غير متساوية** ولاي منحني من قيم x المتسلسلة . فيمكن استخدام صفه لاكرانج لإيجاد قيمة الدالة f(x)، وهي أسهل الطرق العددية المستخدمة ويمكن توضيح نموذج لاغرانج من خلال البيانات التالية:

| x | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $f_{(x)}$ | $f_{(x_0)}$ | $f_{(x_1)}$ | $f_{(x_2)}$ |

لتكن f دالة حقيقية مستمرة وقيمتها معلومة عند النقاط $x_0, x_1, x_2$

**لتقدير قيمة f في نقطة واحدة $X^*$ ، فأن صفة لاكرانج تكتب بالصيغة:**

$$L_i(x^*) = \underbrace{\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}}_{L_0(x^*)} * \underbrace{\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}}_{L_1(x^*)} * \underbrace{\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}_{L_2(x^*)}$$

i=0,1,2

Dr. Nida Hussain

**Lagrange Interpolation Formula for Nth Degree Polynomial**

**فأن صيغه لاكرانج العامة لمتعدد الحدود هي: (حفظ)**

$$f(x^*) = f(x_0)\,L_0(x^*) + f(x_1)\,L_1(x^*) + f(x_2)\,L_2(x^*)$$

$$f(x^*) = f(x_0)\frac{(x^*-x_1)\,(x^*-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x^*-x_0)\,(x^*-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x^*-x_0)\,(x^*-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)}$$

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)..(x_0-x_n)}f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)..(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)..(x_1-x_n)}f_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)..(x_n-x_{n-1})}f_n$$

## Solved Examples Using Lagrange Interpolation Formula

- **<u>Example 1</u>: Find the value of y at x = 0 given some set of values (-2, 5), (1, 7), (3, 11), (7, 34)?**

**Solution:**

Given the known values are,

$x = 0$ ; $x_0 = -2$ ; $x_1 = 1$ ; $x_2 = 3$ ; $x_3 = 7$ ; $y_0 = 5$ ; $y_1 = 7$ ; $y_2 = 11$ ; $y_3 = 34$

Dr. Nida Hussein

Using the Lagrange interpolation formula,

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)..(x_0-x_n)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)..(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)..(x_1-x_n)} f_1 + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)..(x_n-x_{n-1})} f_n$$

$$y = \frac{(0-1)(0-3)(0-7)}{(-2-1)(-2-3)(-2-7)} \times 5 + \frac{(0+2)(0-3)(0-7)}{(1+2)(1-3)(1-7)} \times 7 + \frac{(0+2)(0-1)(0-7)}{(3+2)(3-1)(3-1)} \times 11 + \frac{(0+2)(0-1)(0-3)}{(7+2)(7-1)(7-3)} \times 34$$

y = 21/27 + 4/96 + −77/20 + 51/54
y = 1087/180

**Answer: Value of y at (x = 0) = 1087/180**

- **<u>Example 2:</u> Using Lagrange's interpolation formula find y (10) from the table given below:**

| x | 5 | 6 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| y | 12 | 13 | 14 | 16 |

**Solution:**

Given the known values are,

**$x = 10; x_0 = 5; x_1 = 6; x_2 = 9; x_3 = 11; y_0 = 12; y_1 = 13; y_2 = 14; y_3 = 16$**

$$y = \frac{(10-6)(10-9)(10-11)}{(5-6)(5-9)(5-11)} \times 12 + \frac{(10-5)(10-9)(10-11)}{(6-5)(6-9)(6-11)} \times 13 + \frac{(10-5)(10-6)(10-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)} \times 14 + \frac{(10-5)(10-6)(10-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)} \times 16$$

- Using the Lagrange interpolation formula,
- y = 12/6 - 13/3 + 70/6 + 64/12
- y = 14.6663
- **Answer: Value of y at (x = 10) = 14.6663**

Dr. Nida Hussain

**H.W. 2.1** By Lagrang Formula Find the Value of the Faction?

| x | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f_{(x)}$ | 1 | 1 | 2 | 5 |

Find f (3), f (5)?

**H.W. 2.2** By Lagrang Formula Find the Value of the Faction?

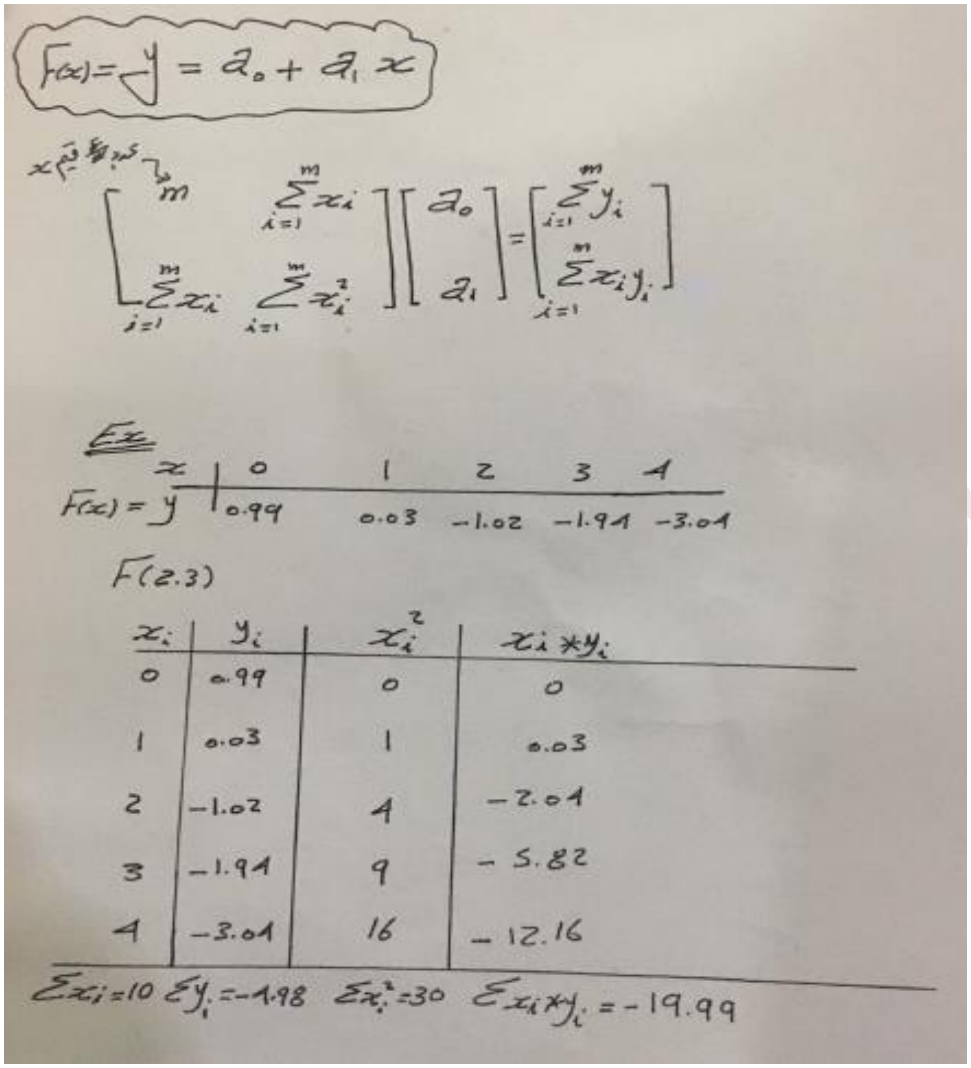
Find f (0), f (2)?

| x | 1 | 2 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f_{(x)}$ | 16 | 96 | 88 | 0 |

Dr. Nida Hussein

# 4. Least Square Method

# 4. طريقة المربعات الصغرى

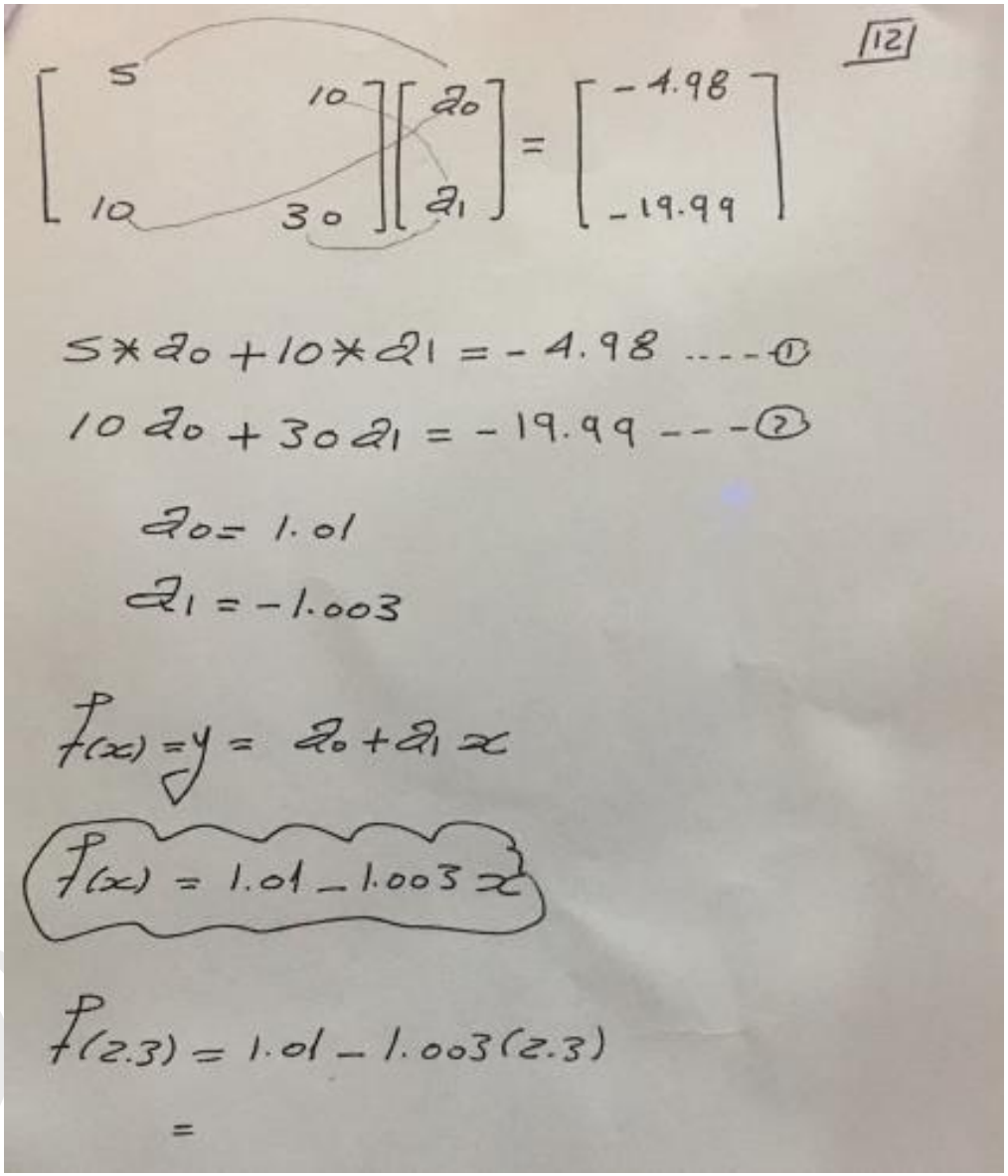



طريقة المربعات الصغرى هي تقنية رياضية، تُستخدم لاختيار خط الاتجاه الأنسب تمثيلًا لمجموعة بيانات في مخطط بياني. أي أنها طريقة لتحديد خط الاتجاه الأنسب لمجموعة بيانات. تُمثل كل نقطة من البيانات العلاقة بين متغير مستقل معروف ومتغير تابع غير معروف

يشار أحيانًا إلى التطبيق الأكثر شيوعًا لهذه الطريقة باسم الخطي أو الاعتيادي.

وتهدف إلى كيفية الحصول على أفضل خط مستقيم يُقلل مجموع مربعات الأخطاء الناتجة عن نتائج المعادلات المرتبطة، مثل مربعات البقايا الناتجة عن الاختلافات بين القيمة المرصودة والقيمة المتوقعة بناءً على ذلك النموذج.

1. افترض أن الخط المستقيم المناسب هو $y=a_0+a_1X$
2. لأي نقطة عينة(xi,yi)



12

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.98 \\ -19.99 \end{bmatrix}$$

$5 * a_0 + 10 * a_1 = -4.98$ ....①

$10\,a_0 + 30\,a_1 = -19.99$ ---②

$a_0 = 1.01$

$a_1 = -1.003$

$f(x) = y = a_0 + a_1 x$

$f(x) = 1.01 - 1.003x$

$f(2.3) = 1.01 - 1.003(2.3)$

=

$$y = c_1 + c_2 x$$

$$c_1 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$c_2 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

**Example 1**: Given the following data:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.1 | 7.7 | 13.6 | 27.2 | 40.9 | 61.6 |

Using the least squares criterion:

1- Fit a 1st order polynomial (straight line) to this data.

**Solution:**

1- Let the straight line is $g(x) = a_o + a_1 x$, then we have

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_o \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix},$$

$$n = 6, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0+1+2+3+4+5 = 15, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 2.1 + 7.7 + 13.6 + 27.2 + 40.9 + 61.6 = 153.1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0(2.1) + 1(7.7) + 2(13.6) + 3(27.2) + 4(40.9) + 5(61.6) = 588.1.$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_o \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 153.1 \\ 588.1 \end{bmatrix}.$$

Use Cramer's rule:

$$a_o = \frac{\begin{bmatrix} 153.1 & 15 \\ 588.1 & 55 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}} = \frac{153.1(55) - 15(588.1)}{6(55) - 15(15)} = \frac{-401}{105} = -3.819048,$$

$$a_1 = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 153.1 \\ 15 & 588.1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}} = \frac{6(588.1) - 153.1(15)}{6(55) - 15(15)} = \frac{1232.1}{105} = 11.734286.$$

$$\therefore \; g(x) = -3.819048 + 11.734286x.$$