جامعة اشور
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

الطـــرق العـدديـــة
Numerical Methods

المستوى الثالث / الفصل الدراسي الخامس

أستاذ المادة

م. د. نداء حسين عبد عون

المحاضرة الأولى (ج 2)

2025-2026

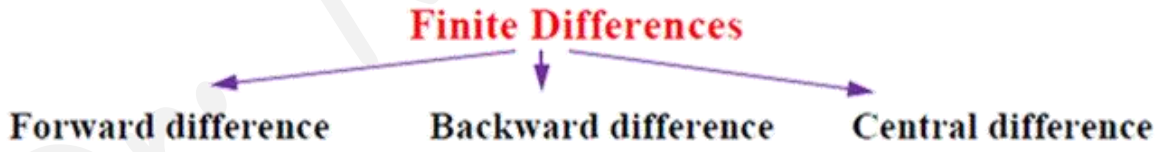
Numerical Differences الفروقات العددية

Finite-difference method (FDM): طريقة الفروق المنتهية (المحدودة)

هي تقنية عددية تستخدم لحل المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) والمعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) عن طريق استبدال المشتقات في هذه المعادلات بفروق محدودة (تقريبات جبرية)، مما يحول المعادلات التفاضلية المستمرة إلى نظام من المعادلات الجبرية القابلة للحل .

تتلخص فكرتها في تقسيم المجال المستمر إلى عدد محدود من النقاط أو الفترات، ثم استخدام قيم الحل عند هذه النقاط لإنشاء نظام من المعادلات الجبرية يتم حلها بشكل عددي .

هناك 3 أنواع رئيسة للفروق المنتهية وهي :



فضلا عن نوع رابع وهو الفروقات المقسمة Dividid Finites Differences

أ) الفروقات المنتهية الأمامية

A) Forward Finites Differences

هي طريقة في التحليل العددي لتقريب المشتقات في حل المعادلات التفاضلية، حيث يتم حساب الفرق بين قيم الدالة عند نقاط متتالية مع تباعد ثابت.

كيف تعمل الفروقات الأمامية؟

1. **تقريب المشتقات :**

تستخدم الفروقات الأمامية لتمثيل المشتقات من خلال الفرق بين قيم الدالة عند نقطة معينة والقيمة التي تليها مباشرة .

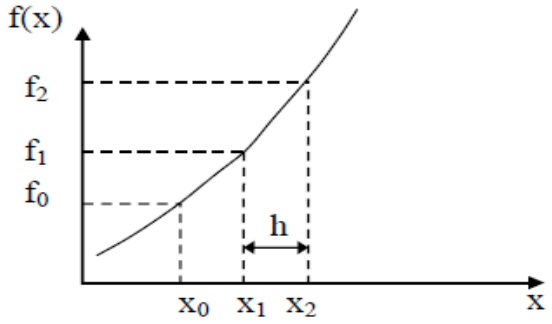
2. **عامل الفروق الأمامية :**

يُرمز لعامل الفروق الأمامية بالرمز "Δ" دلتا

Dr. Nida Hussein

3. تطبيق عملي :

على سبيل المثال، إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ عند النقاط $x0,x1,x2,...$ المتباعدة بمسافة ثابتة h ، فإن الفرق الأمامي عند النقطة xi يكون $f(xi+1) - f(xi)$.



القانون العام المستخدم لمعادلة الفرق المنتهي الامامي من الرتبة k (حفظ) $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

حيث i= 0,1,2,3, 4… n-k

k= 1,2,3, 4…….n

ملاحظة:

- y يكون معطى في السؤال اما قيمة عددية او يكون دالة للـ x y= f(x)
- يجب ان تكون المسافة بين قيم X متساوية (h ثابتة) $h = \frac{Xn-X0}{Xn}$.
- يمكن الحصول على كل هذه الفروق من جدول بسيط يكون كما أدناه ويسمى الجدول المنشأ بـ جدول الفروقات الامامية

(The forward difference table)

Dr. Nida Hussein

The forward difference table

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$$

Dr. Nida Hussein

مثال 1

Ex1. Construct the forward difference table for the following data;

	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4
x	0	0.5	1	1.5	2.0
f(x)	1.2	1.8	3.1	4.6	7.6

الحل

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

حيث $i = 0,1,2,3,4 \ldots n-k$

$k = 1,2,3,4 \ldots\ldots\ldots n$

Dr. Nida Hussein

i	xi	yi	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0	1.2	0.6	0.7	-0.5	1.8
1	0.5	1.8	1.3	0.2	1.3	-
2	1.0	3.1	1.5	1.5	-	-
3	1.5	4.6	3.0	-	-	-
4	2.0	7.6	-	-	-	-

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$$

Ex2.Write difference table of the faction $f_{(x)} = x^3$ use (x=0,1,2,3,4)?

الحل:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		
		37			
4	64				

Dr. Nidal Hussein

ب) الفروقات المنتهية التراجعية B)Backward Finites Differences

هي طريقة في التحليل العددي لتقريب المشتقات في حل المعادلات التفاضلية، حيث يتم حساب الفرق بين قيم الدالة عند نقاط متتالية مع تباعد ثابت.

كيف تعمل الفروقات التراجعية؟

1. تقريب المشتقات :

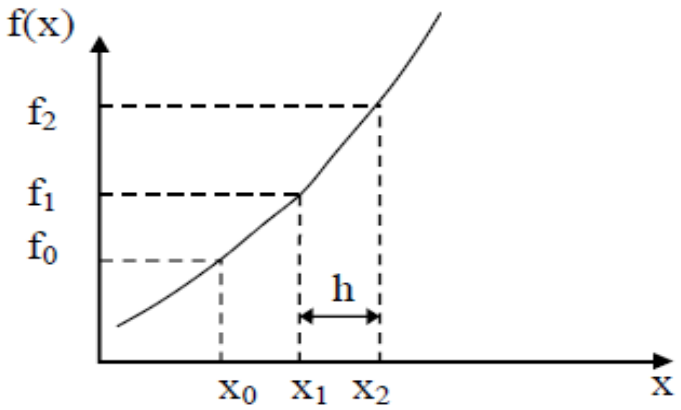
تستخدم الفروقات التراجعية لتمثيل المشتقات من خلال الفرق بين قيم الدالة عند نقطة معينة والقيمة التي قبلها مباشرة .

2. عامل الفروق التراجعية :

يُرمز لعامل الفروق التراجعية بالرمز "∇" (nebla) نيبلا

تطبيق عملي :

على سبيل المثال، إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ عند النقاط $x0,x1,x2,...$ المتباعدة بمسافة ثابتة h ، فإن الفرق التراجعي عند النقطة xi يكون $f(xi)$ -$f(xi\text{-}1)$.



القانون العام المستخدم لمعادلة الفرق المنتهي التراجعي من الرتبة k (حفظ)

$$\nabla^{k} Y_i = \nabla^{k-1} Y_i - \nabla^{k-1} Y_{i-1}$$

ملاحظة:

- y يكون معطى في السؤال اما قيمة عددية او يكون دالة للـ x y= f(x)
- يجب ان تكون المسافة بين قيم X متساوية (h ثابتة).
- الجدول المنشأ يسمى جدول الفروقات التراجعية (The backward difference table)

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

Dr. Hala Hussein

مثال 3

Ex3. Construct the backward table for the last data.

	i=0	i=1	i=2	i=3	I=4
x	0	0.5	1	1.5	2.0
f(x)	1.2	1.8	3.1	4.6	7.6

الحل

$\nabla^{k} Y_i = \nabla^{k-1} Y_i - \nabla^{k-1} Y_{i-1}$

i	xi	yi	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
0	0	1.2	-	-	-	-
1	0.5	1.8	0.6	-	-	-
2	1.0	3.1	1.3	0.7	-	-
3	1.5	4.6	1.5	0.2	-0.5	-
4	2.0	7.6	3.0	1.5	1.3	1.8

C) Central Finites Differences

جـ) الفروقات المنتهية المركزية

يعتبر أكثر دقة لتقريب المشتقة لأنه يستخدم القيمتين السابقة واللاحقة للدالة حول النقطة الحالية، مما يقلل من خطأ التقريب، ويرمز لها بالرمز "δ". sigma سيكما

والصيغة العامة هي :(حفظ)

$$\Delta^k y_i = \nabla^k y_{i+k} = \delta^k y_{i+\frac{k}{2}} \qquad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

x	y	δ	δ^2	δ^3	δ^4
x_{-2}	y_{-2}		δ^2_{y-2}		δ^4_{y-2}
		$\delta_{y-3/2}$		$\delta^3_{y-3/2}$	
x_{-1}	y_{-1}		δ^2_{y-1}		δ^4_{y-1}
		$\delta_{y-1/2}$		$\delta^3_{y-1/2}$	
x_0	y_0		δ^2_{y0}		δ^4_{y0}
		$\delta_{y1/2}$		$\delta^3_{y1/2}$	
x_1	y_1		δ^2_{y1}		δ^4_{y1}
		$\delta_{y3/2}$		$\delta^3_{y3/2}$	
x_2	y_2		δ^2_{y2}		δ^4_{y2}

العلاقة الأساسية التي تربط مؤثر الفرق المركزي بالمؤثرات السابقة (التقدمية والتراجعية) هي:

$$\Delta_{yi} = \nabla_{yi+1} = \delta_{yi+\frac{1}{2}} \qquad i = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

باستخدام تعريف المؤثر δ والعلاقة السابقة نرى بأن:

$$\Delta y_0 = \delta y_{1/2}, \quad \Delta^2 y_0 = \delta^2 y_1, \quad \Delta^3 y_0 = \delta_{y3/2}$$

The central difference table

x_i	y_i	$\delta y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^4 y_i$	$\delta^5 y_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^6 y_i$
x_{-3}	y_{-3}						
		$\delta_{y_{-\frac{5}{2}}}$					
x_{-2}	y_{-2}		$\delta^2{}_{y_{-2}}$				
		$\delta_{y_{-\frac{3}{2}}}$		$\delta^3{}_{y_{-\frac{3}{2}}}$			
x_{-1}	y_{-1}		$\delta^2{}_{y_{-1}}$		$\delta^4{}_{y_{-1}}$		
		$\delta_{y_{-\frac{1}{2}}}$		$\delta^3{}_{y_{-\frac{1}{2}}}$		$\delta^5{}_{y_{-\frac{1}{2}}}$	
x_0	y_0		$\delta^2{}_{y_0}$		$\delta^4{}_{y_0}$		$\delta^6{}_{y_0}$
		$\delta_{y_{\frac{1}{2}}}$		$\delta^3{}_{\frac{1}{2}}$		$\delta^5{}_{y_{\frac{1}{2}}}$	
x_1	y_1		$\delta^2{}_{y_1}$		$\delta^4{}_{y_1}$		
		$\delta_{y_{\frac{3}{2}}}$		$\delta^3{}_{y_{\frac{3}{2}}}$			
x_2	y_2		$\delta^2{}_{y_2}$				
		$\delta_{y_{\frac{5}{2}}}$					
x_3	y_3						

Dr. Nida Hussein

ويمكن الحصول على جميع هذه الفروقات من الجدول ادناه:

x_{-2}	y_{-2}		$(\Delta^2 y_{-3}, \nabla^2 y_1, \delta^2 y_2)$	
		$(\Delta y_{-2}, \nabla y_{-1}, \delta y_{-\frac{3}{2}})$		$(\Delta^3 y_{-3}, \nabla^3 y_0, \delta^3 y_{-\frac{3}{2}})$
x_{-1}	y_{-1}		$(\Delta^2 y_{-2}, \nabla^2 y_0, \delta^2 y_1)$	
		$(\Delta y_{-1}, \nabla y_0, \delta y_{-\frac{1}{2}})$		$(\Delta^3 y_{-2}, \nabla^3 y_1, \delta^3 y_{-\frac{1}{2}})$
x_0	y_0		$(\Delta^2 y_{-1}, \nabla^2 y_1, \delta^2 y0)$	
		$(\Delta y_0, \nabla y_1, , \delta y_{\frac{1}{2}})$		$(\Delta^3 y_{-1}, \nabla^3 y_2, \delta^3 y\frac{1}{2})$
x_1	y_1		$(\Delta^2 y_0, \nabla^2 y_2, \delta^2 y1)$	
		$(\Delta y_1, \nabla y_2, , \delta y_{\frac{3}{2}})$		$(\Delta^3 y_0, \nabla^3 y_3, \delta^3 y\frac{3}{2})$
x_2	y_2		$(\Delta^2 y_1, \nabla^2 y_3, \delta^2 y2)$	

Dr. Nida Hussein

Ex4 : Write the difference table of the faction $f_{(x)} = e^x + 2$ use (x=0,2,4,6,8) and find

$\Delta y_2, \Delta^4 y_0, \nabla y_1, \nabla^2 y_2, \delta^2 y_1, \delta^4 y_2$?

Solution:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0	3				
			$\Delta y_0 = 6.389$ $= \nabla y_1$			
1	2	9.389		40.820$= \nabla^2 y_2 = \delta^2 y_1$		
			$\Delta y_1 = 47.209$		260.802	
2	4	56.598		301.622		$\Delta^4 y_0$ 1666.247$= \delta^4 y_2$
			$\Delta y_2 = 348.831$ $= \nabla y_3$		1927.076	
3	6	405.429		2228.698		
			2577.529			
4	8	2982.958				

$$\Delta y_2 = \nabla y_3 = 348.831$$

$$\Delta^4 y_0 = \delta^4 y_2 = 1666.247$$

$$\nabla^2 y_2 = \delta^2 y_1 = 40.820$$

Dr. Nida Hussein

H.W1.2. Construct the central difference table for the data below.

	i=0	i=1	i=2	i=3	I=4
x	0	0.5	1	1.5	2.0
f(x)	1.2	1.8	3.1	4.6	7.6

Dr. Nida Hussain

D) Divided finite difference

د) الفروقات المنتهية النسبية (المقسمة)

درسنا في المواضيع السابقة بعضا من الصيغ لاستخراج قيمة دالة عند نقطة معينة اعتمادا على الفروقات المنتهية الاعتيادية والتي تعتمد على قيم الدالة في نقاط معلومة ومتساوية الابعاد (x_i)، اما إذا كانت الابعاد بين النقاط المعلومة غير متساوية فان علينا ايجاد نوع اخر من الفروقات الذي يأخذ بنظر الاعتبار التعبير غير المنتظم في قيم النقاط (x_i). ويسمى هذا التعبير **بالفروقات النسبية ويرمز لمؤثره بـ (Δ) او F**

ويعرف الفرق النسبي من الرتبة k

$$\Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i} \qquad i = 0,1,2,..,n-k$$

x	$f(x)$	$f(x_i, x_j)$	$f(x_i, x_j, x_k)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l)$
x_o	f_o			
		$f(x_o, x_1)$		
x_1	f_1		$f(x_o, x_1, x_2)$	
		$f(x_1, x_2)$		$f(x_o, x_1, x_2, x_3)$
x_2	f_2		$f(x_1, x_2, x_3)$	
		$f(x_2, x_3)$		
x_3	f_3			

ويمكن الحصول على جميع الفروقات النسبية من الجدول ادناه (جدول الفروقات المقسمة)

Divided difference table

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$	
		$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	
		$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	y_3			

Ex5: Write the table of the divided difference of $f_{(x)} = x^3 + x - 1$ use x=-2,0,1,4,5?

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-2	-11				
		5			
0	-1		-1		
		2		1	
1	1		5		0.000
		22		1	
4	67		10		
		62			
5	129				

Dr. Nida Hussein

Review

In numerical analysis, a difference table defines a set of data and systematically varies the differences, which can be either finite differences (forward, backward, or center) or divided differences. These tables are useful for tasks such as interpolation, where many points are generated across the points of the array, and for performing numerical differential approximations of functions from the data.

Types of Difference Tables

- **Finite differences tables: These tables use function values and are used for evenly spaced data points.**
  - **Forward differences tables: These involve calculating the difference between the value of a function at one point and its value at the previous point.**
  - **backward differences tables: These involve calculating the difference between the value of a function at one point and its value at the next point.**
  - **central differences tables: These calculate the difference between the values of a function at points that are partially separated from the center points.**
- **Divided differences: These are used when the data are not partially separated.**
  - **The ratio of the change in the value of a function to the change in the value of x between two points.**
  - **The differences divided to the higher degree are calculated in detail from the differences between the light degree.**

Dr. Nida Hussain

مراجعة

في التحليل العددي، جدول الفرق ينظم مجموعة من نقاط البيانات ويحسب الاختلافات بينها بشكل منهجي، والتي يمكن أن تكون فروقًا محدودة (أمامية، خلفية، أو مركزية) أو فروقًا مقسمة .تُعد هذه الجداول أساسية لمهام مثل الاستيفاء، حيث يتم إنشاء كثيرة حدود تمر عبر النقاط المعطاة، ولإجراء التفاضل العددي بتقريب مشتقات الدوال من بيانات منفصلة .

أنواع جداول الفروقات

- **جداول الفروقات المحدودة** : تستخدم هذه الجداول قيم الدالة ويتم استخدامها لنقاط البيانات المتباعدة بشكل متساوٍ.
  - **الفروقات الأمامية** : تتضمن حساب الفرق بين قيمة الدالة عند نقطة ما وقيمتها عند النقطة السابقة.
  - **الفروق العكسية** : تتضمن حساب الفرق بين قيمة الدالة عند نقطة ما وقيمتها عند النقطة التالية.
  - **الفروقات المركزية** : احسب الفرق بين قيم الدالة عند نقاط متباعدة بشكل متساوٍ على جانبي نقطة مركزية.
- **جداول الفروق المقسمة** : تستخدم عندما لا تكون نقاط البيانات متباعدة بشكل متساوٍ .
  - كل إدخال هو نسبة التغير في قيم الدالة إلى التغير في قيم x بين نقطتين .
  - يتم حساب الفروق المقسمة ذات الدرجة الأعلى بشكل متكرر من الفروق ذات الدرجة الأدنى .

Dr. Nida Hussain